آزمون اول: آزمون صعودی و نزولی

۱) اگر تابع $f=\{(۱,۲),(۴,۷),(۲,m^۲-۲),(۵,۱۷)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $۲<|m|<۷$ ۲) $۲<|m|<۳$ ۳) $۰<m<۴$ ۴) $۷<m<۱۷$

۲) تابع $f=\{(-۶,۲),(۰,۴),(۶,۷),(۷,۹),(۲,m^۲-۳)\}$ غیریکنوا است. m چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳) اگر تابع $f=\{(-۱,a-۱),(۰,a^۳-۱),(-۲,a)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰)\cup(۰,۱)$ ۴) $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$

۴) حدود m کدام باشد تا تابع $f=\{(۵,۶),(۳,m^۲-m),(-۴,۲),(۴,m^۲-m)\}$ یک تابع صعودی باشد؟

۱) $(-۲,۱)\cup(۲,۳)$ ۲) $[-۲,۱]\cup[۲,۳]$ ۳) $[-۲,۳]-[-۱,۲]$ ۴) $[-۲,۳]-(-۱,۲)$

۵) تابع $f:R\to R$ یک تابع پیوسته و نزولی اکید است که محور xها را با طول یک قطع می‌کند. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

۶) تابع چندجمله‌ای $y=f(x)$ اکیداً صعودی است و نمودار آن از نقاط $A(-۴,-۲)$ و $B(۳,۲)$ می‌گذرد. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-(f(x))^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۸

۷) به‌ازای چه مقداری از a، تابع
$$f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;x\le -۱\\ -\dfrac{x}{۲}+a & ;-۱<x<۱\\ -\sqrt{x-۱}-۱ & ;x\ge ۱\end{cases}$$
اکیداً نزولی خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۸) تابع
$$f(x)=\begin{cases}۲ & ;\ x<-۱\\ k & ;\ -۱\le x<۱\\ -x & ;\ x\ge ۱\end{cases}$$
بر روی دامنه‌اش نزولی است. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹) کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطهٔ
$$f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;\ x\le -۱\\ -x^۲ & ;\ x\ge ۰\end{cases}$$
درست است؟

۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست. ۲) اکیداً صعودی است.

۳) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست. ۴) اکیداً نزولی است.

۱۰) کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=x^۲+۴x-۵$ با دامنهٔ $\left|x+\frac{۷}{۲}\right|<\frac{۳}{۲}$ درست است؟

۱) مثبت است. ۲) نزولی است. ۳) صعودی است. ۴) غیریکنوا است.

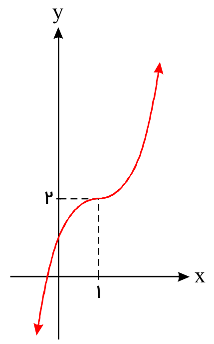
۱۱ تابع $f(x)=|x(x^2+3x+3)+2|$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) $-\sqrt[3]{2}$ ۴) $-1-\sqrt[3]{2}$

۱۲ وضعیت نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+3x$ چگونه است؟

۱) همواره صعودی
۲) همواره نزولی
۳) برای $x>1$ صعودی و برای $x<1$ نزولی
۴) برای $x>1$ نزولی و برای $x<1$ صعودی

۱۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-a)^3+b$ به‌صورت زیر است. حاصل $a\cdot b$ کدام است؟



۱) 2
۲) -2
۳) 3
۴) -3

۱۴ تابع $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ در سه نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند. اگر حاصل‌ضرب طول این نقاط ۳ و $f(2)=15$ باشد، a کدام است؟

۱) 1 ۲) -3 ۳) 3 ۴) -1

۱۵ مساحت محصور بین محورهای مختصات و خط واصل بین نقاط تلاقی منحنی به معادلهٔ $y=(x+1)^3$ با آن‌ها کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۶ در کدام بازه‌ها، تابع $f(x)=\begin{cases}2(x+3)^3 & ;x<-3\\ -x^2-3x & ;-3\le x<0\\ \sqrt{x} & ;x\ge 0\end{cases}$، به ترتیب از راست به چپ صعودی و نزولی است؟

۱) $(-2,-1)\ ,\ (-1,+\infty)$
۲) $[-1,1]\ ,\ (-3,-2)$
۳) $[-1,0]\ ,\ [-4,-2]$
۴) $\left[-\frac{3}{2},-1\right]\ ,\ [-2,-1]$

۱۷ اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=2^{-x}$ باشد، کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

۱) $f+g$ ۲) fg ۳) $g-f$ ۴) $\frac{f}{g}$

۱۸ بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y=\left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

۱) $(-1,\frac{1}{3})$ ۲) $(-2,\frac{1}{3})$ ۳) $(-3,\frac{1}{3})$ ۴) $(-4,\frac{1}{3})$

۱۹ تابع $f(x)=\begin{cases}a-\log_{\frac{1}{2}}^{x} & ,\ x\ge 3\\ 2x+1 & ,\ x<3\end{cases}$ به‌ازای چه حدودی از a، همواره در شرط $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)\ge f(x_1)$ صدق می‌کند؟

۱) $a\le 6$ ۲) $a\ge 6$ ۳) هیچ‌مقدار a ۴) فقط $a=6$

۲۰ کدام‌یک از توابع زیر اکیداً یکنوا است؟

۱) $f(x)=\frac{1}{x}$ ۲) $f(x)=x^2$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=[x]$

پاسخنامه تشریحی

۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$f=\{(۱,۲),(۲,m^۲-۲),(۴,۷),(۵,۱۷)\}$

تابعی اکیداً صعودی است که با افزایش x، مقدار y هم افزایش یابد پس باید داشته باشیم:

$f(۱)<f(۲)<f(۴)\rightarrow ۲<m^۲-۲<۷\rightarrow ۴<m^۲<۹\rightarrow ۲<|m|<۳$

توجه کنید اگر $a^۲<x^۲<b^۲$ آن‌گاه $a<|x|<b$ است. $(a,b>۰)$

۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴) با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

x	-۶	۰	۲	۶	۷
y	۲	۴	$m^۲-۳$	۷	۹

با توجه به این که تابع غیریکنوا است، باید $m^۲-۳<۴$ یا $m^۲-۳>۷$ باشد، داریم:

$m^۲-۳<۴\Rightarrow m^۲<۷\Rightarrow -\sqrt{۷}<m<\sqrt{۷}\quad(۱)$

$m^۲-۳>۷\Rightarrow m^۲>۱۰\Rightarrow m<-\sqrt{۱۰}$ یا $m>\sqrt{۱۰}\quad(۲)$

مجموعه جواب : $(۱)\cup(۲)\Rightarrow(-\infty,-\sqrt{۱۰})\cup(-\sqrt{۷},\sqrt{۷})\cup(\sqrt{۱۰},+\infty)$

m اعداد صحیح ۳ و -۳ را نمی‌تواند بپذیرد.

۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)** با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

$f:\{(-۲,a),(-۱,a-۱),(۰,a^۳-۱)\}$

$-۲<-۱<۰\xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}}f(-۲)>f(-۱)>f(۰)\Rightarrow a>a-۱>a^۳-۱$

$a>a-۱\Rightarrow ۰>-۱\Rightarrow$ برقرار است $\Rightarrow a\in\mathbb{R}\quad(۱)$

$a^۳-۱<a-۱\Rightarrow a^۳-a<۰\Rightarrow a(a^۲-۱)<۰$

a	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$a(a^۲-۱)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow a<-۱$ یا $۰<a<۱\quad(۲)$

$(۱)\cap(۲)\Rightarrow a<-۱$ یا $۰<a<۱\Rightarrow a\in(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$

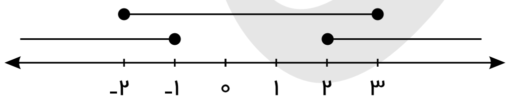
۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)** ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$f:\{(-۴,۲),(۳,m^۲-m),(۴,m^۲-m),(۵,۶)\}$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_۱<x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱)\le f(x_۲)$ است پس:

$$۲\le m^۲-m\le ۶\rightarrow\begin{cases}m^۲-m\ge ۲\rightarrow m^۲-m-۲\ge ۰\rightarrow(m-۲)(m+۱)\ge ۰\\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}m\le -۱\text{ یا }m\ge ۲\quad(I)\\ m^۲-m\le ۶\rightarrow m^۲-m-۶\le ۰\rightarrow(m-۳)(m+۲)\le ۰\\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۲\le m\le ۳\quad(II)\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$\rightarrow m\in[-۲,۳]-(-۱,۲)$

۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)** چون تابع پیوسته و نزولی اکید و $f(۰)=۰$ است پس حتما به ازای $x>۱$، $f(x)<۰$ است و به ازای $x<۱$، $f(x)>۰$ است. برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ کافی است زیرا رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
x		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	۰	$-$	
$xf(x)\ge ۰$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$\rightarrow x\in[۰,۱]$

۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)** چون تابع f از نقاط $A(-۴,-۲)$ و $B(۳,۲)$ می‌گذرد، داریم: $f(-۴)=-۲\ ,\ f(۳)=۲$

آزمون صعودی و نزولی

$$y=\sqrt{۴-f((x))^۲}\Rightarrow ۴-(f(x))^۲\ge ۰\Rightarrow (f(x))^۲\le ۴\Rightarrow |f(x)|\le ۲\Rightarrow -۲\le f(x)\le ۲$$

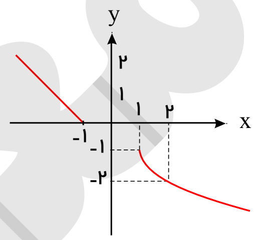
$$\xrightarrow[f(۳)=۲]{f(-۴)=-۲} f(-۴)\le f(x)\le f(۳)\xrightarrow{f\ \text{اکیداً صعودی}} -۴\le x\le ۳\Rightarrow$$ اعداد صحیح: $-۴,-۳,\dots,۲,۳$

دامنه شامل ۸ عدد صحیح است.

۷ (۴) (۳) **(۲)** (۱) با رسم نمودار f داریم:

$$f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;x\le -۱\\ -\dfrac{x}{۲}+a & ;-۱<x<۱\\ -\sqrt{x-۱}-۱ & ;x\ge ۱\end{cases}\Rightarrow A\left|\begin{array}{l}x=-۱\\ y=\dfrac{۱}{۲}+a\end{array}\right.\quad B\left|\begin{array}{l}x=۱\\ y=-\dfrac{۱}{۲}+a\end{array}\right.$$

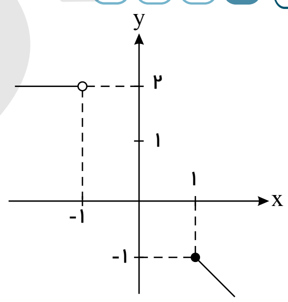
با توجه به نمودار زیر تابع f زمانی نزولی است که عرض نقطهٔ $A(-۱,\frac{۱}{۲}+a)$ کوچکتر یا مساوی صفر و عرض نقطهٔ $B(۱,-\frac{۱}{۲}+a)$ بزرگتر یا مساوی -۱ باشد، پس داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{۱}{۲}+a\le ۰\Rightarrow a\le -\dfrac{۱}{۲}\\ -\dfrac{۱}{۲}+a\ge -۱\Rightarrow a\ge -\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{اشتراک}} a=-\dfrac{۱}{۲}$$

۸ **(۴)** (۳) (۲) (۱) ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}۲ & ;\ x<-۱\\ k & ;\ -۱\le x<۱\\ -x & ;\ x\ge ۱\end{cases}$$

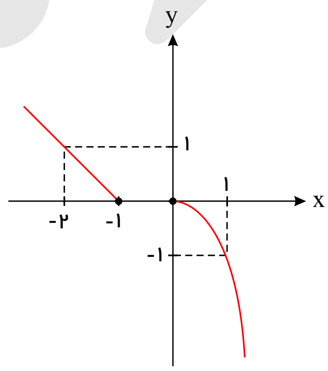


با توجه به نمودار بالا برای این که تابع f نزولی باشد، باید داشته باشیم: $-۱\le k\le ۲$

اعداد صحیح k = $-۱,۰,۱,۲\Rightarrow$ ۴مقدار

۹ (۴) **(۳)** (۲) (۱) نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;\ x\le -۱\Rightarrow y=|x+۱|=-x-۱\\ -x^۲ & ;\ x\ge ۰\end{cases}\rightarrow$$

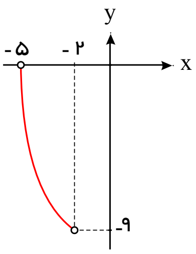


با توجه به نمودار واضح است که تابع f نزولی است ولی چون $f(-۱)=f(۰)=۰$، تابع اکیداً نزولی نمی‌باشد.

۱۰ (۴) (۳) **(۲)** (۱)

$$\left|x+\frac{۷}{۲}\right|<\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x+\frac{۷}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۲}<x<\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۲}\Rightarrow -۵<x<-۲$$

نمودار تابع ۵ $f(x)=x^۲+۴x-$ را در بازهٔ $(-۵,-۲)$ رسم می‌کنیم، توجه کنید که رأس این سهمی $S\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{۲a}=-۲\\ \frac{۴ac-b^۲}{۴}=-۹\end{array}\right.$ است و محور طول‌ها را در $x=۱$ و $x=-۵$ قطع می‌کند.

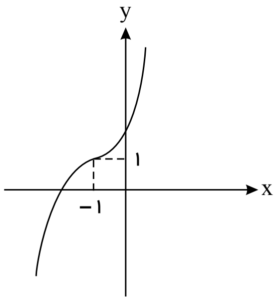


تابع در بازهٔ $(-۵,-۲)$ نزولی است.

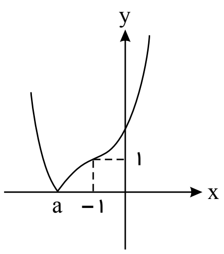
۱۱ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=|x^۳+۳x^۲+۳x+۱+۱|=|(x+۱)^۳+۱|$$

نمودار تابع $y=(x+۱)^۳+۱$ را به کمک انتقال تابع $y=x^۳$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f، کافیست قسمتی از نمودار را که زیر محور xهاست، نسبت به محور xها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور xهاست حفظ کنیم:



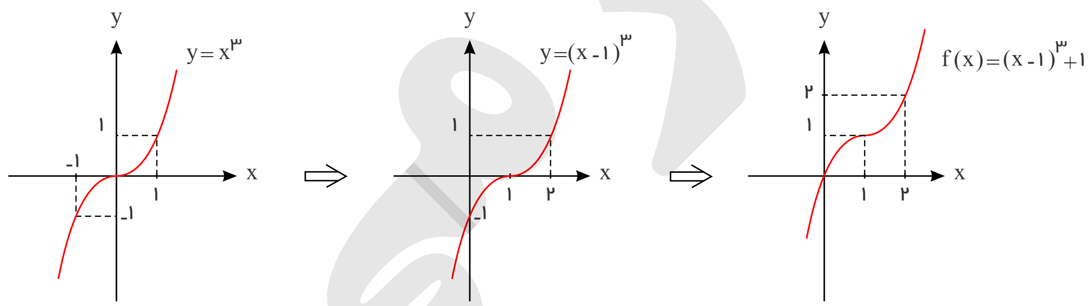
برای به‌دست آوردن a باید معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم:

$$(x+۱)^۳+۱=۰\rightarrow(x+۱)^۳=-۱\rightarrow x+۱=-۱\rightarrow x=-۲$$

پس تابع f در بازهٔ $[-۲,+\infty)$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابر با -۲ است.

۱۲ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۱=(x-۱)^۳+۱$$



تابع f در کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۱۳ ۴ ۳ ۲ **۱** نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=x^۳$ به دست آمده است. اگر نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم ضابطهٔ $y=(x-۱)^۳+۲$ به‌دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس:

$$a=۱\ ,\ b=۲\Rightarrow a\cdot b=۲$$

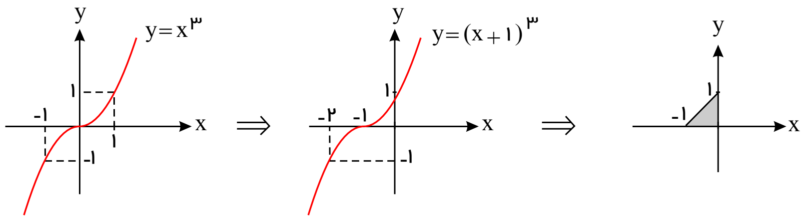
۱۴ **۴** ۳ ۲ ۱ اگر تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+ax+b$ در سه نقطهٔ $x=\alpha$ و $x=\beta$ و $x=\gamma$ محور x ها را قطع کند، با توجه به این که ضریب $x^۳$ برابر یک است، می‌توان $f(x)$ را به صورت زیر نوشت.

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^۳+۳x^۲+ax+b$$
$$\Rightarrow x^۳-(\alpha+\beta+\gamma)x^۲+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\alpha=x^۳+۳x^۲+ax+b\ \ (۱)$$

از طرفی $\alpha\beta\gamma=۳$ پس داریم:

$$(۱)\Rightarrow-\alpha\beta\gamma=b\Rightarrow b=-۳\Rightarrow f(x)=x^۳+۳x^۲+ax-۳$$
$$f(۲)=۱۵\Rightarrow ۸+۱۲+۲a-۳=۱۵\Rightarrow a=-۱$$

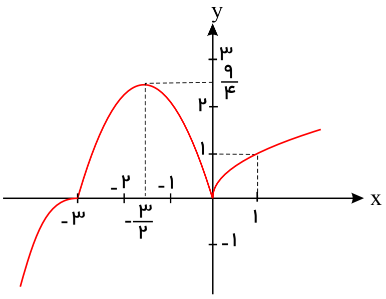
۱۵ ۴ ۳ **۲** ۱ نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=(x+۱)^۳$ حاصل شود.



$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

۱۶ ۱ ۲ **۳** ۴

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، توجه کنید سهمی $y=-x^2-3x$ دارای رأس به مختصات $S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2} \\ \frac{4ac-b^2}{4}=\frac{9}{4}\end{matrix}\right.$ است که محور طول‌ها را در ۰ و ۳− قطع می‌کند.

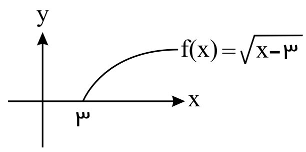


تابع در بازهٔ $(-\infty,-\frac{3}{2}]$ صعودی، در بازهٔ $[-\frac{3}{2},0]$ نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است.

$[-4,-2]\subset(-\infty,-\frac{3}{2}]\Rightarrow[-4,-2]\Rightarrow$ نزولی

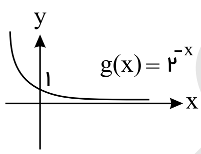
$[-1,0]\subset[-\frac{3}{2},0]\Rightarrow[-1,0]\Rightarrow$ صعودی

۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴



$\Rightarrow$ f اکیداً صعودی

$g(x)=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x\Rightarrow$



$\Rightarrow$ g اکیداً نزولی

چون f اکیداً صعودی است، پس $-f$ اکیداً نزولی است و می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً نزولی تابعی اکیداً نزولی است. پس تابع $g+(-f)=g-f$ اکیداً نزولی است.

۱۸ ۱ **۲** ۳ ۴

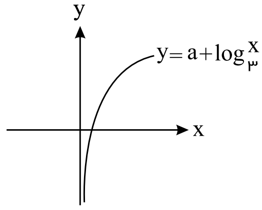
تابع نمایی $f(x)=a^x$ با شرط $a>1$ تابعی اکیداً صعودی است. پس داریم:

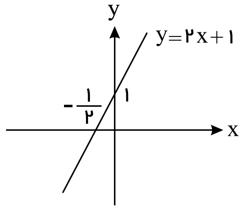
$$y=\left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x\Rightarrow\frac{5-k}{1-3k}>1\Rightarrow\frac{5-k}{1-3k}-1>0\Rightarrow\frac{5-k-1+3k}{1-3k}>0$$

$$\Rightarrow\frac{2k+4}{1-3k}>0\Rightarrow\begin{array}{c|ccccccc} k & -\infty & & -2 & & \frac{1}{3} & & +\infty \\ \hline \frac{2k+4}{1-3k} & & - & 0 & + & \text{ن} & - & \end{array}\Rightarrow -2<k<\frac{1}{3}$$

۱۹ ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا شکل کلی از نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} a-\log_{\frac{1}{3}}^{x} & ,\ x\geq 3 \\ 2x+1 & ,\ x<3\end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

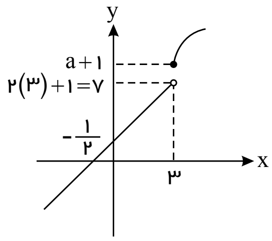




$$y=a-\log_{\frac{1}{3}}^{x}=a-\log_{3^{-1}}^{x}=a+\log_{3}^{x}$$

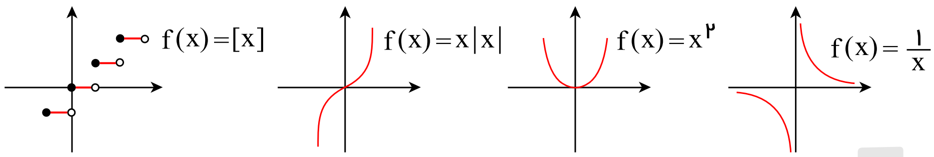
حال هردو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

شرط $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)\ge f(x_1)$ به‌معنی صعودی بودن $f(x)$ است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:



$$\longrightarrow 7\le a+1 \Rightarrow 6\le a$$

۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴ نمودار هر چهار تابع را رسم می‌کنیم:



(۴) (۳) (۲) (۱)

مشاهده می‌شود که تنها گزینه‌ی ۳ تابعی اکیداً یکنوا است.