آزمون سوم حد و پیوستگی

۱) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}-۲\sin x & x\leq -\dfrac{\pi}{۲}\\ a\sin x+b & -\dfrac{\pi}{۲}<x<\dfrac{\pi}{۲}\\ \cos x & \dfrac{\pi}{۲}\leq x\leq \pi\end{cases}$ همواره پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲) تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۳[x]-۴$ در بازهٔ $(۰,۴)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳) به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-۲x+a & x\geq ۱\\ x^۲+۳x & x<۱\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ پیوسته است؟

۱) -۶ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) ۶

۴) به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲-ax & ,x>-۱\\ [x]-۲ & ,x\leq -۱\end{cases}$ در $x=-۱$ پیوسته است؟ ([ ]، نماد جزءصحیح است)

۱) $a=۱$ ۲) $a=-۱$ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار حقیقی a

۵) مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(x^۳-۱)}{x-۱} & ; x\neq ۱\\ ۱۲ & ; x=۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶) در تابع $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin^۲ x-\cos x\sin x}$ مقدار $f(\dfrac{\pi}{۴})$، را چه مقداری تعریف کنیم تا تابع در $x=\dfrac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\dfrac{-\sqrt{۲}}{۲}$

۷) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲-ax & x\geq ۱\\ -۴x+۲a-۱ & x<۱\end{cases}$، در $x=۱$ پیوسته است. حاصل $f(۲a)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۱ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۸) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x-۱} & ,|x|>۱\\ ۲\cos \pi x & ,|x|\leq ۱\end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و (-۱) چگونه است؟

۱) در ۱ و (-۱) پیوسته ۲) در ۱ و (-۱) ناپیوسته ۳) در ۱ پیوسته و در (-۱) ناپیوسته ۴) در ۱ ناپیوسته و در (-۱) پیوسته

۹) به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+x & x\leq ۰\\ \dfrac{a|x|}{x} & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار a

۱۰) تابع $y=x^۲[x]+۳x$ در $x=۰$ .... و در $x=۱$ .... است.

۱) پیوسته - پیوسته ۲) پیوسته - ناپیوسته ۳) ناپیوسته - پیوسته ۴) ناپیوسته - ناپیوسته

۱۱ تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|-۱}{x+۱} & x\neq ۰ \\ -۱ & x=۰ \end{cases}$ در $x=۰$ چه وضعیتی دارد؟

(۱) فقط از چپ پیوسته است. (۲) فقط از راست پیوسته است. (۳) پیوسته است. (۴) نه از چپ پیوسته است و نه از راست.

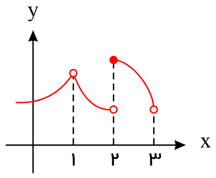
۱۲ تابع $f(x)=[x^۲]$ در بازهٔ $(-۱,k)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است. بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) $\sqrt{۳}$

۱۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^۲ x}{۱-\sqrt{\cos x}} & ۰<x<\dfrac{\pi}{۲} \\ a\sin \pi x + a & -\dfrac{\pi}{۲}<x\leq ۰ \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) هیچ مقدار a

۱۴ نمودار تابع f به‌شکل زیر است. کدام گزینه درست نیست؟



(۱) تابع در $x=۱$ پیوسته نیست. (۲) تابع در $x=۲$ پیوستگی راست دارد.

(۳) تابع در $x=۳$ پیوستگی چپ دارد. (۴) تابع در بازهٔ $(۲,۳)$ پیوسته است.

پاسخنامه تشریحی

۱ ۴ ۳ **۲** ۱ کافی است تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=-\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد.

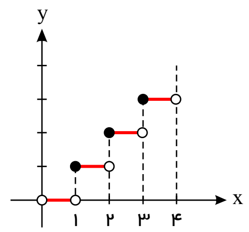
$$x=\frac{\pi}{۲}\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\cos x=\cos\frac{\pi}{۲}=۰\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}(a\sin x+b)=a+b\Rightarrow a+b=۰\\ f(\frac{\pi}{۲})=\cos\frac{\pi}{۲}=۰\end{cases}$$

$$x=-\frac{\pi}{۲}\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{-\pi}{۲})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{-\pi}{۲})^+}(a\sin x+b)=-a+b\\ \lim\limits_{x\to(\frac{-\pi}{۲})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{-\pi}{۲})^-}(-۲\sin x)=۲\Rightarrow -a+b=۲\\ f(-\frac{\pi}{۲})=-۲(-۱)=۲\end{cases}$$

از حل دستگاه به جواب $a=-۱$ و $b=۱$ می‌رسیم.

۲ ۴ **۳** ۲ ۱

ناپیوستگی در این تابع فقط توسط $[x]$ می‌تواند ایجاد شود و بقیهٔ جملات و حتی ضریب ۳ پشت براکت هیچ تأثیری ندارند. پس کافی است خود براکت x را رسم کنیم و این موضوع را ببینیم.



در نقاط درونی بازه سه نقطهٔ $\{۱,۲,۳\}$ ایجاد ناپیوستگی کرده‌اند.

۳ **۴** ۳ ۲ ۱ شرط پیوسته بودن تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}(-۲x+a)=-۲+a\\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}(x^۲+۳x)=۱+۳=۴\qquad\Rightarrow -۲+a=۴\to a=۶\\ f(۱)=-۲+a\end{cases}$$

۴ ۴ **۳** ۲ ۱ شرط آنکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}(x^۲-ax)=۱+a$$

$$\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}([x]-۲)=[(-۱)^-]-۲=-۲-۲=-۴$$

$$f(-۱)=[-۱]-۲=-۱-۲=-۳$$

هیچ مقداری برای a نمی‌توان یافت که حد راست و حد چپ و مقدار تابع باهم برابر باشند.

۵ ۴ ۳ **۲** ۱ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱} f(x)=\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{a(x^۳-۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{a(x-۱)(x^۲+۱+x)}{(x-۱)}=۳a\\ f(۱)=۱۲\end{cases}$$

پس $۳a=۱۲$ و درنتیجه $a=۴$ است.

۶ ۴ ۳ ۲ **۱** اگر تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)=f(\frac{\pi}{۴})$

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin^۲ x-\cos x\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-(\sin x-\cos x)}{\sin x(\sin x-\cos x)}=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۴})=-\sqrt{۲}$$

۷ ۴ **۳** ۲ ۱ شرط آنکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

تابع $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow ۱ - a = -۴ + ۲a - ۱ \Rightarrow a = ۲$$

درنتیجه ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۱ \\ -۴x + ۳ & x < ۱ \end{cases}$ خواهد بود.

حال مقدار $f(۲a)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۲a) = f(۴) = ۴^۲ - ۲(۴) = ۸$$

۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-۱)(x-۳)}{x-۱} & , x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ ۲\cos \pi x & , -۱ \leq x \leq ۱ \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x - ۳ & , x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ ۲\cos \pi x & , -۱ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

بررسی پیوستگی در $x=۱$: $\begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x-۳) = ۱ - ۳ = -۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} ۲\cos \pi x = -۲ \\ f(-۱) = ۲\cos \pi = -۲ \end{cases}$ $\rightarrow$ تابع در $x=۱$ پیوسته است

بررسی پیوستگی در $x=-۱$: $\begin{cases} \lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} ۲\cos \pi x = ۲\cos(-\pi) = -۲ \\ \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^-} (x-۳) = -۱ - ۳ = -۴ \\ f(-۱) = ۲\cos(-\pi) = -۲ \end{cases}$ $\rightarrow$ تابع در $x=-۱$ ناپیوسته است

۹ (۱) (۲) (۳) (۴) شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که در راست و در چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (x + [x]) = ۰ + (-۱) = -۱$$

$$f(۰) - [۰] + ۰ = ۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{a|\overbrace{x}^{+}|}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{ax}{x} = a$$

حد چپ و مقدار تابع هیچ‌گاه با هم برابر نمی‌شوند، بنابراین تابع به ازای هیچ مقداری از a در $x=۰$ پیوسته نیست.

۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴) شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی باهم برابر باشند.

پیوستگی در $x=۰$: $\begin{cases} \lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۰ \times [۰^+] + ۳(۰) = ۰ \\ \lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۰ \times [۰^-] + ۳(۰) = ۰ \\ f(۰) = ۰ \times [۰] + ۳(۰) = ۰ \end{cases}$ $\rightarrow$ تابع در $x=۰$ پیوسته است.

پیوستگی در $x=۱$: $\begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۱ \times [۱^+] + ۳(۱) = ۱ + ۳ = ۴ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱ \times [۱^-] + ۳(۱) = ۰ + ۳ = ۳ \\ f(۱) = ۱ \times [۱] + ۳(۱) = ۱ + ۳ = ۴ \end{cases}$ $\rightarrow$ تابع در $x=۱$ ناپیوسته است.

۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴) شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

حد چپ، راست و مقدار تابع را در $x=۰$ می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۰^+} \frac{|x| - ۱}{x + ۱} = \frac{-۱}{۱} = -۱ \\ \lim_{x\to ۰^-} \frac{|x| - ۱}{x + ۱} = \frac{-۱}{۱} = -۱ \\ f(۰) = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰)$$

پس تابع f در $x=۰$ پیوسته است.

۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴) می‌دانیم تابع $[x]$ (جزء صحیح) در نقاطی با طول صحیح ناپیوسته و در نقاطی با طول غیرصحیح پیوسته است. لذا با توجه به بازهٔ مطرح شده، کافیست شرط پیوستگی را برای تابع $[x^۲]$ در نقاطی که $x^۲$ صحیح می‌شود بررسی کنیم یعنی نقاط ۰ و ۱ و $\sqrt{۲}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = f(۰) = ۰$$

تابع در این نقطه، پیوسته است.

$$x = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x^۲\to ۰^+} [x^۲] = ۱ = f(۱) \\ \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x^۲\to ۰^-} [x^۲] = ۰ \end{cases}$$

تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

$$x = \sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to (\sqrt{۲})^+} f(x) = \lim_{x^۲\to ۲^+} [x^۲] = ۲ = f(۲) \\ \lim_{x\to (\sqrt{۲})^-} f(x) = \lim_{x^۲\to ۲^-} [x^۲] = ۱ \end{cases}$$

تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

روشن است که به ازای مقادیر $k > \sqrt{۲}$، تعداد نقاط ناپیوستگی بیش از یکی خواهد بود. پس بیشترین مقدار k برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۳ ۴ ۳ ۲ ۱ برای پیوستگی تابع در نقطهٔ $x = ۰$، حدود چپ و راست و مقدار تابع در این نقطه باید با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin^۲ x}{۱ - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱ - \cos^۲ x}{۱ - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{(۱ - \cos x)(۱ + \cos x)}{۱ - \sqrt{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to ۰^+} \frac{(۱ - \sqrt{\cos x})(۱ + \sqrt{\cos x})(۱ + \cos x)}{۱ - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to ۰^+} (۱ + \sqrt{\cos x})(۱ + \cos x) = ۲ \times ۲ = ۴$$

$$f(۰) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (a \sin \pi x + a) = ۰ + a = a$$

پس $a = ۴$ است.

۱۴ ۴ ۳ ۲ ۱ چون در نمودار تابع، $f(۳)$ تعریف نشده است یعنی تابع در $x = ۳$ مقدار ندارد بنابراین تابع در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	**۲**	۳	۴
۲	۱	۲	**۳**	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	**۲**	۳	۴
۶	**۱**	۲	۳	۴
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	۲	**۳**	۴
۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۴	۱	۲	**۳**	۴