

درس دوم : فصل سوم

۱) اگر نمودار تابع خطی f ، نمودار وارون خود را فقط در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و $f(1) = 2$ باشد، نمودار تابع f^{-1} ، محور x ها را در کدام طول قطع می‌کند؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② ۲ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$

۲) تابع $f(x) = |\frac{x}{2} + a|$ در بازه $(-2, 1)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟

- ① $[-\frac{1}{2}, 1]$ ② $\mathbb{R} - (-\frac{1}{2}, 1)$ ③ $\mathbb{R} - (-4, 2)$ ④ $[-4, 2]$

۳) توابع $f(x) = 2x - |x|$ و $g(x) = x - |2x|$ از نظر یک به یک بودن به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

- ① یک به یک - یک به یک ② یک به یک - غیر یک به یک ③ غیر یک به یک - یک به یک ④ غیر یک به یک - غیر یک به یک

۴) به ازای کدام مقدار a ، وارون تابع $f(x) = \frac{1-2x}{3x+4}$ از نقطه $(a+4, a)$ می‌گذرد؟

- ① -1 و -5 ② -1 و 2 ③ 1 و 2 ④ 1 و 5

۵) ضابطه تابع وارون $f(x) = \frac{3x+2}{4}$ کدام است؟

- ① $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{2}$ ② $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}x - 2$ ③ $f^{-1}(x) = 2x + \frac{3}{2}$ ④ $f^{-1}(x) = \frac{4x-2}{3}$

۶) اگر $f = \{(-3, k), (\frac{1}{2}a, -2), (2a+1, k), (b-1, 1), (-1, 4b)\}$ تابعی یک به یک باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ ۲

۷) اگر f تابعی خطی با شیب m باشد، به ازای کدام مقدار m شیب تابع f^{-1} برابر $4m$ است؟ ($m \neq 0$)

- ① هیچ مقدار m ② ± 2 ③ ± 1 ④ $\pm \frac{1}{2}$

۸) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x \geq 2 \\ x+a & , x < 2 \end{cases}$ وارون پذیر باشد، حدود a کدام است؟

- ① $a = 2$ ② $a \geq 1$ ③ $a \leq 1$ ④ $a \geq 0$

۹) اگر $f = \{(2, a+1), (\sqrt{b}, 3)\}$ و $f^{-1} = \{(a-1, c+1), (d, b-2)\}$ حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

- ① ۱۴ ② ۹ ③ ۱۱ ④ ۱۳

۱۰) دامنه تابع $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ به صورت $D_f = (a, b)$ تعریف شده و وارون f ، یک تابع است. (a, b) کدام یک از بازه‌های زیر می‌تواند باشد؟

- ① $(0, 3)$ ② $(-1, 2)$ ③ $(-2, 1)$ ④ $(1, 4)$

۱۱) اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $f = \{(x, -2x+7) | x \in A\}$ باشد، آن گاه حاصل $f^{-1}(3) + f(1)$ کدام است؟

- ① ۷ ② ۶ ③ ۲ ④ -2



۱۲) اگر $f(x) = \frac{2}{3}x + a$ باشد و نمودار f^{-1} از نقطه $(2, 6)$ بگذرد، مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{14}{3}$ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۷

۱۳) اگر $f = \{(a^2 + 1, 3), (-1, 7), (b + 1, 7), (5, 3), (3, 0), (3, a + 2)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) -۴

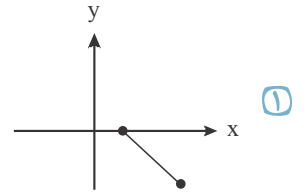
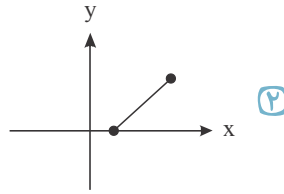
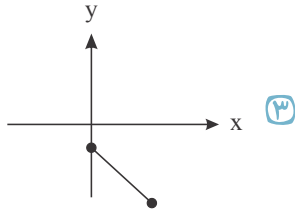
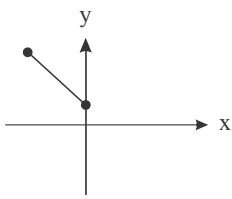
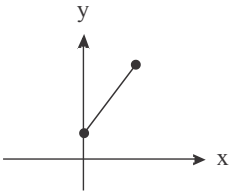
۱۴) اگر $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x \leq 0 \\ x - 1 & , x > 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f^{-1}(2) + f^{-1}(-2)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۵) ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-7x + 3}{5}$ کدام است؟

- ۱) $y = \frac{7x - 3}{5}$ ۲) $y = \frac{5}{-7x + 3}$ ۳) $y = \frac{-5}{7}x + \frac{3}{7}$ ۴) $y = \frac{5}{7}x - \frac{3}{7}$

۱۶) نمودار وارون تابع روبه‌رو، کدام است؟



۴

۳

۲

۱

۱۷) تابع $f(x) = (x - 2)(x - 4) + 2x$ در کدام یک از بازه‌های زیر یک به یک است؟

- ۱) $[0, 3]$ ۲) $[-1, 2]$ ۳) $[1, 5]$ ۴) $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

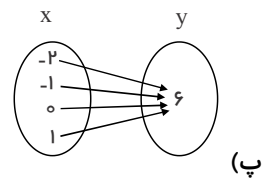
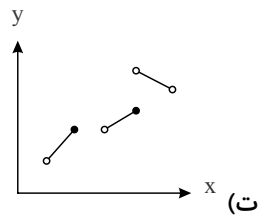
۱۸) در تابع خطی $f(x) = (a + 5)x + 2b$ ، اگر $f^{-1}(7) = 2$ و $f^{-1}(11) = 3$ ، مقدار a کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۹) در چند مورد از روابط زیر، y تابعی یک به یک از x است؟

الف) $y = \begin{cases} 2x + 1 & , x > 2 \\ x - 1 & , x < 2 \end{cases}$

ب) $|x| + y = 2$



۴

۳

۲

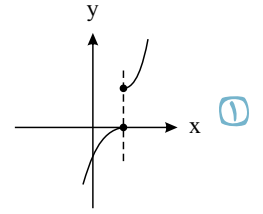
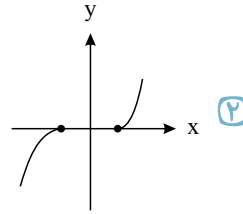
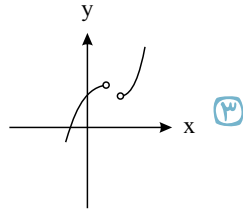
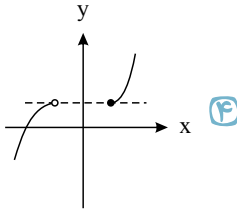
۱

۲۰) وارون تابع $f(x) = \frac{3x - 1}{2}$ ، کدام است؟

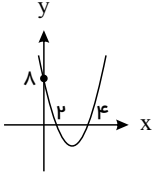
- ۱) $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{2}$ ۲) $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$ ۳) $f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{3}$ ۴) $f^{-1}(x) = \frac{-2x + 1}{3}$



۲۱) کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع یک به یک را نمایش می‌دهد؟



۲۲) اگر وارون تابع $g(x) = ax + b$ نمودار سهمی زیر را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند، آن‌گاه جواب معادله $g^{-1}(x) = g(x)$ کدام است؟



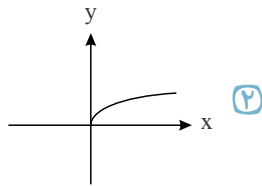
۱۰/۳ (۴)

۱ (۳)

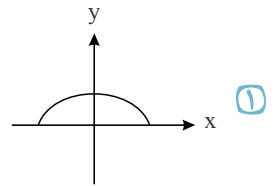
۲ (۲)

۵/۳ (۱)

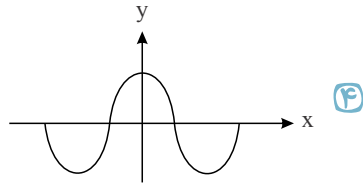
۲۳) کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



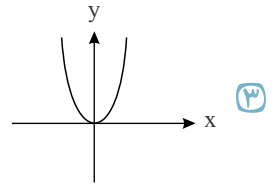
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۲۴) اگر $f(x) = 3x - a$ و $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{b}$ مقدار $a + b$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

۲۵) تابع $f(x) = x|x|$ وارون خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

پنج (۴)

سه (۳)

دو (۲)

صفر (۱)

۲۶) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{5}$ مقدار $f(f^{-1}(4))$ کدام است؟

۴ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۷) تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار دو تابع f و f^{-1} محور x ها را در نقطه‌ای به طول یک قطع کنند، $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

۲۸) در تابع $f(x) = x^3 + x + 2$ ، اگر محل برخورد $f^{-1}(x)$ با محور x ها را A' بنامیم و نقطه A قرینه A' نسبت به خط $y = x$ باشد، آن‌گاه اندازه پاره خط AA' کدام است؟

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۲۹) اگر وارون تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - mx + 1$ از نقطه $(-m, -1)$ بگذرد، مقدار m کدام است؟ $(D_f = (-\infty, -1])$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۳۰) کم‌ترین مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + k & , x < 0 \\ -2x + 3 & , x \geq 0 \end{cases}$ یک به یک باشد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخنامه تشریحی

چون تابع f ، وارون خود را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است، پس نقطه $A(3, 3)$ روی f و f^{-1} قرار دارد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$(1, 2) \in f \rightarrow (2, 1) \in f^{-1}$$

$$(3, 3) \in f^{-1}$$

از طرفی چون f تابعی خطی است وارون آن هم تابعی خطی خواهد بود.

$$f^{-1}(x) = ax + b$$

$$f^{-1}(2) = 1 \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = 3 \end{cases}$$

$$f^{-1}(3) = 3 \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = 3 \end{cases}$$

$$-a = -2 \rightarrow a = 2 \rightarrow 2(2) + b = 1 \rightarrow b = -3$$

$$f^{-1}(x) = 2x - 3 \xrightarrow[y=0]{\text{برخورد با محور } x \text{ ها}} 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

ابتدا محدوده‌ای را برای a محاسبه می‌کنیم که تابع در بازه داده شده یک به یک نباشد سپس مجموع جواب حاصل را از \mathbb{R} کم می‌کنیم. می‌دانیم اگر ریشه عبارت داخل قدرمطلق در بازه $(-2, 1)$ قرار داشته باشد تابع در آن بازه یک به یک نخواهد بود. پس:

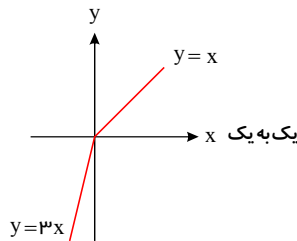
$$\frac{x}{2} + a = 0 \Rightarrow x = -2a \Rightarrow -2 < -2a < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 1$$

بنابراین:

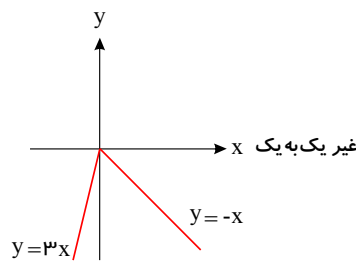
$$a \text{ محدوده} = \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

تابعی یک به یک است که اگر هر خطی موازی طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$f(x) = 2x - |x| = \begin{cases} 2x - x & ; x \geq 0 \\ 2x + x & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases}$$



$$g(x) = x - |2x| = \begin{cases} x - 2x & ; x \geq 0 \\ x + 2x & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow g(x) = \begin{cases} -x & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$(a + 4, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, a + 4) \in f \rightarrow f(a) = a + 4$$

$$\rightarrow \frac{1 - 2a}{3a + 4} = a + 4 \rightarrow (1 - 2a) = (3a + 4)(a + 4)$$

$$\rightarrow 1 - 2a = 3a^2 + 12a + 4a + 16 \rightarrow 3a^2 + 18a + 15 = 0$$

$$\rightarrow 3(a^2 + 6a + 5) = 0 \rightarrow (a + 5)(a + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = -1 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$f(x) = \frac{3x + 2}{4} \rightarrow y = \frac{3x + 2}{4} \rightarrow 4y = 3x + 2 \rightarrow 4y - 2 = 3x$$



معین کرمی

جای x و y را عوض می‌کنیم. $\rightarrow x = \frac{4y-2}{3} \rightarrow y = \frac{4x-2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x-2}{3}$

تابعی یک به یک است که اگر مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، مؤلفه‌های اول نیز یکسان باشند. **۱ ۲ ۳ ۴ ۶**

$$f = \{(-3, k), (\frac{a}{2}, -2), (2a+1, k), (b-1, 1), (-1, 4b)\}$$

یک به یک $(-3, k) \in f, (2a+1, k) \in f \rightarrow 2a+1 = -3 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -2$

$$\rightarrow f = \{(-3, k), (-1, -2), (-3, k), (b-1, 1), (-1, 4b)\}$$

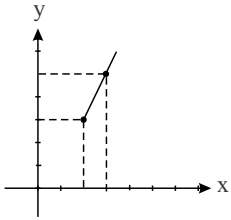
تتابع $(-1, 4b) \in f, (-1, -2) \in f \rightarrow 4b = -2 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$

پس: $a - b = -2 - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

هرگاه دو خط نسبت به نیمساز قرینه باشند. شیب یکی معکوس دیگری است یا حاصل ضرب شیب آن‌ها یک خواهد بود. **۱ ۲ ۳ ۴ ۷**

$$m_f \times m_{f^{-1}} = 1 \rightarrow (m)(4m) = 1 \rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

بارسم تابع f به ازای $x \geq 2$ داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸**



برای یک به یک بودن می‌بایست، هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، این ویژگی زمانی برقرار است که در ضابطهٔ دوم به ازای $x < 2$ مقادیر $x+a$ کوچکتر از 3 باشد، پس باید $a \leq 1$ باشد.

نکته: برای تابع وارون پذیر f داریم: $(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$ **۱ ۲ ۳ ۴ ۹**

نکته: دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) برابرند، اگر و تنها اگر: $a = c, b = d$

$$f = \{(2, a+1), (\sqrt{b}, 3)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(a+1, 2), (3, \sqrt{b})\}$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$f^{-1} = \{(a-1, c+1), (d, b-2)\}$$

بنابراین: $\{(a+1, 2), (3, \sqrt{b})\} = \{(a-1, c+1), (d, b-2)\}$

واضح است که $a+1 \neq a-1$ پس:

$$\begin{cases} (a+1, 2) = (d, b-2) \\ (3, \sqrt{b}) = (a-1, c+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = b-2 \Rightarrow \boxed{b=4} \\ 3 = a-1 \Rightarrow \boxed{a=4} \\ a+1 = d \xrightarrow{a=4} \boxed{d=5} \\ \sqrt{b} = c+1 \xrightarrow{b=4} \boxed{c=1} \end{cases}$$

بنابراین: $a+b+c+d = 4+4+1+5 = 14$

اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آنگاه تابع یک به یک است، پس f باید یک به یک باشد. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰**

از آنجا که نمودار تابع f یک سهمی است، برای یک به یک بودن، بازهٔ (a, b) نباید شامل رأس سهمی باشد.

$$x_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-b}{2a} = -\frac{(-7)}{2 \times (2)} = \frac{7}{4} = 1,75$$

از بین گزینه‌ها، تنها گزینهٔ (۳) شامل رأس سهمی نمی‌باشد.

با قرار دادن اعضای مجموعهٔ A به جای x ، تابع f را می‌نویسیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱**

$$f = \{(1, 5), (2, 3), (3, 1), (4, -1)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 2, f(1) = 5 \Rightarrow f^{-1}(3) + f(1) = 2 + 5 = 7$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$(2, 6) \in f^{-1} \Rightarrow (6, 2) \in f \Rightarrow f(6) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{2}{3} \times (6) + a \Rightarrow 2 = 4 + a \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow \frac{2}{3}x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}(y + 2)$$



$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}y + 3 \xrightarrow[\text{جای } x, y]{\text{عوض کردن}} y = \frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow f^{-1}(0) = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\begin{cases} (a^2 + 1, 3) \in f \\ (5, 3) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک } f} a^2 + 1 = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1, 7) \in f \\ (b + 1, 7) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک } f} b + 1 = -1 \Rightarrow b = -2$$

اگر $a = 2$ باشد دو زوج مرتب $(3, 4)$ و $(3, 0)$ را داریم که شرط تابع بودن را نقض می‌کند.

اگر $a = -2$ باشد تابع f به صورت $f = \{(-1, 7), (5, 3), (3, 0)\}$ می‌شود و یک‌به‌یک است، پس:

$$a + b = -2 - 2 = -4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$$

$$f^{-1}(-2) = b \Rightarrow f(b) = -2$$

غقق $a \leq 0$: اگر $f(a) = 2a - 1 = 2 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

اگر $a > 0$: $f(a) = a - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

غقق $b \leq 0$: اگر $f(b) = 2b - 1 = -2 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{2}}$

اگر $b > 0$: $f(b) = b - 1 = -2 \Rightarrow b = -1$ غقق

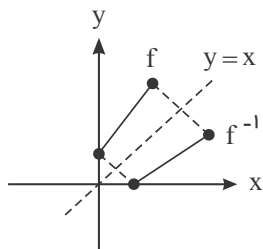
$$\Rightarrow f^{-1}(2) + f^{-1}(-2) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

برای محاسبه ضابطه وارون ابتدا عبارت را بر حسب x بازنویسی می‌نماییم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$y = \frac{-7x + 3}{5} \rightarrow -7x + 3 = 5y \rightarrow -7x = 5y - 3 \rightarrow x = \frac{5y - 3}{-7}$$

در این مرحله x را به y و y را به x تبدیل می‌نماییم.

$$y = \frac{5x - 3}{-7} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{5}{7}x + \frac{3}{7}$$

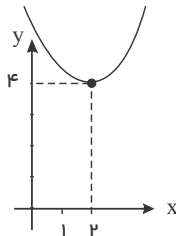


کافیست نمودار f را نسبت به نیمساز قرینه کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

ابتدا بهتر است تابع را ساده‌تر کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$f(x) = (x - 2)(x - 4) + 2x = x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x - 2)^2 + 4$$

با توجه به معادله نمودار $f(x)$ به شکل زیر می‌باشد.



با توجه به نمودار تابع فقط در بازه مطرح شده در گزینه ۲ یعنی $[-1, 2]$ یک‌به‌یک می‌باشد.

باید توجه داشت اگر $A \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ روی تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A' \begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}$ روی تابع وارون قرار دارد. پس داریم: $f(x) = (a + 5)x + 2b$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\begin{cases} f^{-1}(11) = 3 \rightarrow f(3) = 11 \rightarrow (a + 5)(3) + 2b = 11 \rightarrow 3a + 2b = -4 \\ f^{-1}(7) = 2 \rightarrow f(2) = 7 \rightarrow (a + 5)(2) + 2b = 7 \rightarrow 2a + 2b = -3 \end{cases}$$

$$\ominus \rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

در مورد (الف) با رسم تابع می‌توان مشخص کرد، که تابع یک‌به‌یک است هم‌چنین در مورد (ت) تابع یک‌به‌یک است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

در نمودار مختصاتی تابع اگر هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x) = \frac{3x-1}{2} \Rightarrow y = \frac{3x-1}{2}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$x = \frac{3y-1}{2} \Rightarrow 2x = 3y-1 \Rightarrow 3y = 2x+1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$$

تنها در نمودار گزینه ۴، هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (شرط تابع بودن) و هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در

یک نقطه قطع می‌کند (شرط یک به یک بودن).

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: تابع نیست.

گزینه‌های ۲ و ۳: یک به یک نیستند.

ابتدا معادله سهمی را به دست می‌آوریم. $x = 2$ و $x = 4$ ریشه‌های تابع درجه دوم هستند:

$$f(x) = a'(x-2)(x-4)$$

نقطه $(0, 8)$ در معادله صدق می‌کند.

$$\rightarrow 8 = a'(0-2)(0-4) \Rightarrow 8a' = 8 \Rightarrow a' = 1 \Rightarrow f(x) = (x-2)(x-4)$$

وارون g ، نمودار را در نقاط ۱ و ۳ قطع می‌کند، پس:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = (1-2)(1-4) = (-1)(-3) = 3 \Rightarrow (1, 3) \in g^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3-2)(3-4) = 1(-1) = -1 \Rightarrow (3, -1) \in g^{-1}$$

حال معادله خط g^{-1} را می‌یابیم:

$$m = \frac{3 - (-1)}{1 - 3} = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow y - 3 = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = -2x + 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = -2x + 5$$

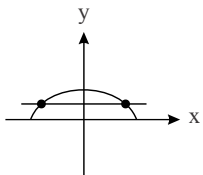
حال وارون $g^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = -2x + 5 \Rightarrow 2x = 5 - y$$

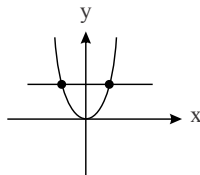
$$\Rightarrow x = \frac{5-y}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{5-x}{2}, g^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow -2x + 5 = \frac{5-x}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

نکته: تابع یک‌به‌یک، تابعی است که هر خط موازی محور x ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

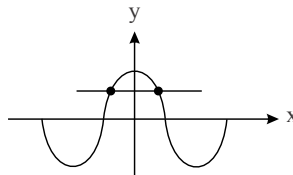
با توجه به نکته بالا و نمودارهای زیر، گزینه ۲ پاسخ است.



گزینه ۱



گزینه ۳



گزینه ۴

برای محاسبه a ، b ، c کافیست، وارون تابع f را محاسبه و معادله f قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 3x - a \xrightarrow{\text{وارون}} y = 3x - a$$

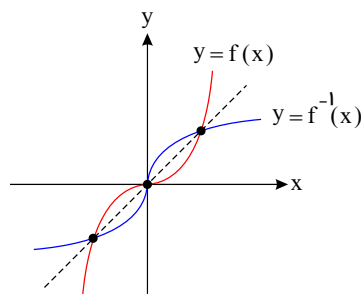
$$x = 3y - a \rightarrow 3y = x + a \rightarrow y = \frac{x+a}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+a}{3} = \frac{x-1}{b} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow a + b = 2$$

یکی از روش‌های حل این سوال رسم می‌باشد:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

پس از رسم نمودار را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌نماییم تا منحنی تابع معکوس مشخص شود:



با توجه به منحنی سه نقطه برخورد وجود دارد.

راه حل اول:



نکته: برای محاسبه ضابطه تابع وارون $y = f(x)$ ابتدا x را بر حسب y به دست می آوریم، سپس x و y را جابه جا می کنیم. ابتدا با استفاده از نکته بالا، ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = \frac{2x-1}{5} \Rightarrow 2x-1 = 5y \Rightarrow x = \frac{5y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{2}$$

بنابراین:

$$f(f^{-1}(4)) = f\left(\frac{5(4)+1}{2}\right) = f\left(\frac{21}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{21}{2}\right)-1}{5} = 4$$

راه حل دوم:

$$\text{نکته: } f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

با استفاده از نکته بالا داریم: $f(f^{-1}(4)) = 4$ تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم و داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷**

$$(1, 0) \in f \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow a(1) + b = 0 \rightarrow a + b = 0$$

$$(1, 0) \in f^{-1} \rightarrow (0, 1) \in f \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow a(0) + b = 1 \rightarrow b = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \rightarrow a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x + 1 \rightarrow y = -x + 1$$

$$\rightarrow x = -y + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = -x + 1 \xrightarrow{x=2} f^{-1}(2) = -2 + 1 = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$A'(a, 0) \in f^{-1} \rightarrow (0, a) \in f \rightarrow f(0) = a \rightarrow (0)^2 + 0 + 2 = a \rightarrow a = 2$$

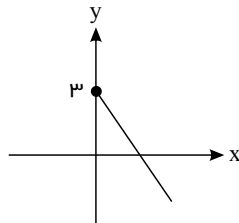
$$\rightarrow A'(2, 0) \xrightarrow{A \text{ قرینه } A' \text{ نسبت به خط } y=x} A(0, 2)$$

$$\rightarrow AA' = \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$(-m, -1) \in f^{-1} \rightarrow (-1, -m) \in f \rightarrow f(-1) = -m$$

$$\rightarrow (-1)^2 - m(-1) + 1 = -m \rightarrow 1 + m + 1 = -m \rightarrow 2m = -2 \rightarrow \boxed{m = -1}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰تابع f را برای $x \geq 0$ رسم می کنیم، داریم:نمودار تابع $x^2 - 2x + k$ سهمی رو به بالاست پس باید کمترین مقدار آن بزرگتر یا مساوی ۳ باشد.

$$y = x^2 - 2x + k = x^2 - 2x + 1 + k - 1 = (x-1)^2 + (k-1)$$

کمترین مقدار این تابع در نقطه مرزی $x = 0$ اتفاق می افتد.

$$\rightarrow (0-1)^2 + k - 1 \geq 3 \rightarrow 1 + k - 1 \geq 3 \rightarrow k \geq 3$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴