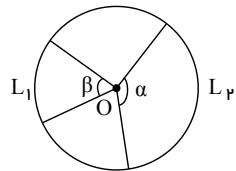


آزمون اول مثلثات

۱ اگر در شکل زیر حاصل ضرب طول کمان های L_1 و L_2 برابر $\frac{\pi}{9}$ مساحت دایره باشد و $\alpha = 4\beta$ ، آنگاه



مثلی با دو زاویه α و β از کدام نوع است؟ (O مرکز دایره است).

- ① متساوی الساقین
② قائم الزاویه
③ قائم الزاویه و متساوی الساقین
④ هیچ کدام

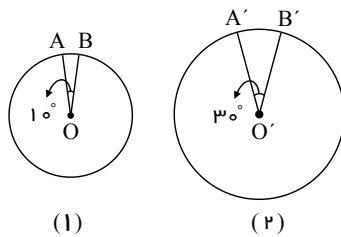
۲ اگر $\alpha = \beta - \gamma$ ، $\beta = 60^\circ$ و $\gamma = -3\pi$ رادیان باشند، آنگاه انتهای کمان زاویه α در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می گیرد؟

- ① اول
② دوم
③ سوم
④ چهارم

۳ انتهای کمان های ۳ و ۴ رادیان به ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

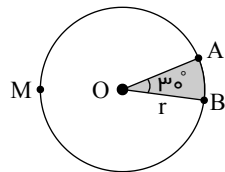
- ① دوم - دوم
② دوم - سوم
③ سوم - سوم
④ سوم - چهارم

۴ مطابق شکل، اگر مساحت دایره (۲) سه برابر مساحت دایره (۱) باشد، حاصل $\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}$ کدام است؟



- ① $\sqrt{3}$
② $3\sqrt{3}$
③ ۳
④ ۴

۵ در شکل مقابل، محیط ناحیه هاشور خورده $12 + \pi$ است. در این صورت طول کمان \widehat{AMB} کدام است؟



- ① 9π
② 8π
③ 6π
④ 11π

۶ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

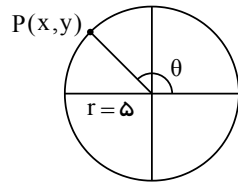
- ① $-\cos^2 x$
② $-\cos x$
③ $\cos^2 x$
④ $\cos x$

۷ ساده شده $\frac{(-\sin x + 1 - \cos x)(\sin x + 1 + \cos x)}{(\tan x + \cot x)}$ کدام است؟

- ① $-\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
② $-2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
③ $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
④ $2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

۸ اگر $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ باشد، حاصل $\sin x - \cos x$ چقدر می تواند باشد؟

- ① $\frac{9}{16}$
② $\frac{3}{4}$
③ $\frac{7}{16}$
④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$



۹ اگر $\sin \theta = \frac{1}{4}$ باشد، با توجه به شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

$\frac{-5\sqrt{15}}{4}$ (۲)

$\frac{-4\sqrt{15}}{5}$ (۱)

$\frac{-4\sqrt{5}}{15}$ (۴)

$\frac{-15\sqrt{5}}{4}$ (۳)

۱۰ اگر $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$ و $\cos \theta = 2m + 1$ باشد، محدوده m شامل چند عدد صحیح است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = R\alpha \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = 4R\beta \end{cases}$$

$$L_1 \times L_r = \frac{\pi}{9} \times \pi R^r \rightarrow R\beta \times 4R\beta = \frac{\pi^2 R^r}{9} \rightarrow 4\beta^2 = \frac{\pi^2}{9}$$

$$\rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \beta = 30^\circ \text{ و } \alpha = 4\beta \xrightarrow{\beta=30^\circ} \alpha = 120^\circ$$

مثلث متساوی الساقین $\alpha = \beta \rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ \rightarrow \gamma = 120^\circ$

پس مثلث متساوی الساقین است و زاویه قائمه ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 60^\circ \\ \gamma &= -3\pi = -3 \times 180^\circ = -540^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \beta - \gamma \rightarrow \alpha = 60^\circ - (-540^\circ) = 600^\circ$$

$$\alpha = (3 \times 360^\circ) + 60^\circ = 60^\circ$$

بنابراین α در ربع اول قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$1 \text{ رادیان} \approx 57,3^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{ناحیه دوم} \approx 3 \times 57,3^\circ \approx 171,9^\circ \\ \text{ناحیه سوم} \approx 4,5 \times 57,3^\circ \approx 257,85^\circ \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

مساحت و شعاع دایره (۲) را به ترتیب با S' و R' و مساحت و شعاع دایره (۱) را به ترتیب با S و R نمایش می دهیم، داریم:

$$\text{فرض سؤال: } \frac{S'}{S} = 3 \rightarrow \frac{\pi R'^r}{\pi R^r} = 3 \rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{6})}{R(\frac{\pi}{18})} = \frac{R'}{R} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\widehat{AB} = r\alpha = r \times \frac{\pi}{6} = \frac{r\pi}{6}$$

$$2r + \frac{r\pi}{6} = 12 + \pi \rightarrow r(2 + \frac{\pi}{6}) = 6(2 + \frac{\pi}{6}) \rightarrow r = 6$$

$$\rightarrow \widehat{AMB} = r \times (2\pi - \frac{\pi}{6}) = 6 \times \frac{11\pi}{6} \rightarrow \widehat{AMB} = 11\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

می دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ است انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است.

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

باتوجه به اتحاد مزدوج داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷



$$\frac{(-\sin x + 1 - \cos x)(\sin x + 1 + \cos x)}{(\tan x + \cot x)} = \frac{(1 - (\sin x + \cos x))(1 + (\sin x + \cos x))}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{1 - (\sin x + \cos x)^2}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}} = \frac{1 - (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x)}{\frac{1}{\sin x \cos x}}$$

$$= \frac{1 - (1 + 2 \sin x \cos x)}{\frac{1}{\sin x \cos x}} = \frac{-2 \sin x \cos x}{\frac{1}{\sin x \cos x}} = -2 \sin^2 x \cos^2 x$$

دو طرف تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۸)

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{9}{16}$$

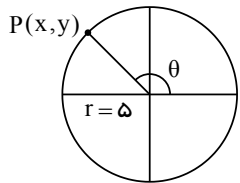
حاصل عبارت $(\sin x - \cos x)^2$ را بدست می‌آوریم:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\frac{9}{16}} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

بنابراین داریم:

$$\sin x - \cos x = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۹)



می‌دانیم در دایره مثلثاتی با شعاع غیر از یک، $(r \neq 1)$ سینوس یک زاویه برابر است با:

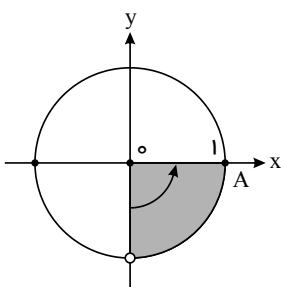
$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \\ \Rightarrow x^2 &= r^2 - y^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25 \left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ &= 25 \times \frac{15}{16} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{25 \times 15}{16}} = \pm \frac{5}{4} \sqrt{15} \xrightarrow[x < 0]{\text{ربع دوم}} x = -\frac{5}{4} \sqrt{15} \end{aligned}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰)

ناحیه رنگ شده، $2\pi > \theta > \frac{3\pi}{2}$ را مشخص می‌کند، در این ناحیه $1 > \cos \theta > 0$ است،



بنابراین داریم:



$$0 < 2m + 1 \leq 1 \rightarrow -1 < 2m \leq 0 \rightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 0 \xrightarrow{\text{عدد صحیح}} m = 0$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴

۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴

۱۰	۱	۲	۳	۴
----	---	---	---	---