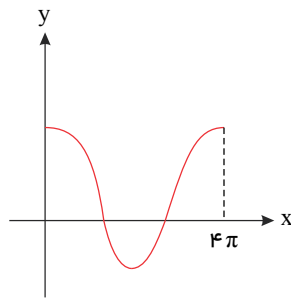


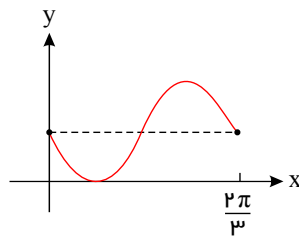
آزمون چهارم مثلثات

۱ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟



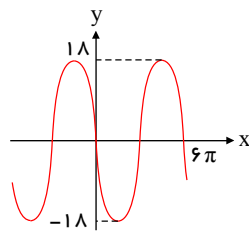
- ۱ $-\frac{1}{2}$
۲ $\frac{1}{2}$
۳ ۱
۴ صفر

۲ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای $x = \frac{7\pi}{6}$ کدام است؟



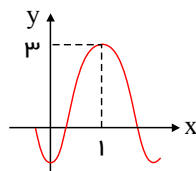
- ۱ $\frac{1}{2}$
۲ ۲
۳ ۱
۴ صفر

۳ نمودار تابع $f(x) = b \sin ax$ به صورت مقابل است. کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟



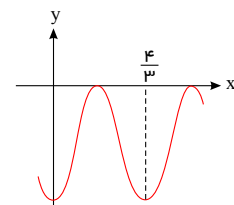
- ۱ $\frac{53}{3}$
۲ -۱۹
۳ -۱۷
۴ $-\frac{53}{3}$

۴ اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟



- ۱ -۲
۲ ۲
۳ -۱
۴ -۳

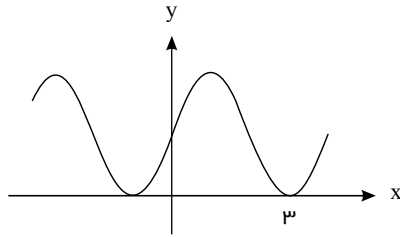
۵ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a \cos \pi(1 + bx)$ است. در این صورت ab کدام می‌تواند باشد؟ ($a > 0$)



- ۱ $\frac{3}{2}$
۲ $\frac{5}{2}$
۳ ۳
۴ ۵

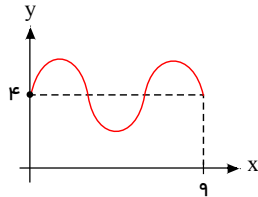


۶ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به صورت زیر است، $a + b$ کدام است؟



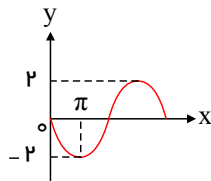
- ① $\frac{1}{2}$
- ② ۱
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ ۲

۷ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2m + \sin n\pi x$ است. مقدار mn کدام است؟



- ① $\frac{4}{3}$
- ② $-\frac{2}{3}$
- ③ $-\frac{4}{3}$
- ④ $\frac{2}{3}$

۸ اگر نمودار تابع با ضابطه $y = b \cos\left(\frac{3\pi}{2} + ax\right)$ به صورت زیر باشد، ab کدام است؟ ($a > 0$)

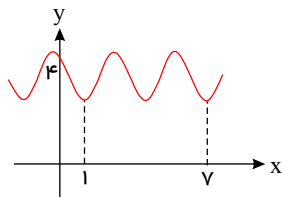


- ① -۲
- ② -۱
- ③ $-\frac{3}{2}$
- ④ ۱

۹ دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ کدام است؟

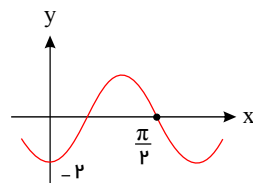
- ① 2π
- ② π
- ③ $\frac{\pi}{2}$
- ④ $\frac{\pi}{4}$

۱۰ شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می‌باشد. حاصل ab کدام است؟



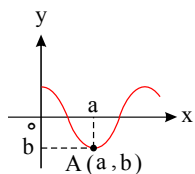
- ① $-\frac{8}{3}$
- ② -۲
- ③ $-\frac{2}{3}$
- ④ $-\frac{4}{3}$

۱۱ شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(bx + \frac{\pi}{4}\right)$ است. مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ کدام است؟



- ① $\sqrt{2}$
- ② $2\sqrt{2}$
- ③ $-\sqrt{2}$
- ④ $-2\sqrt{2}$

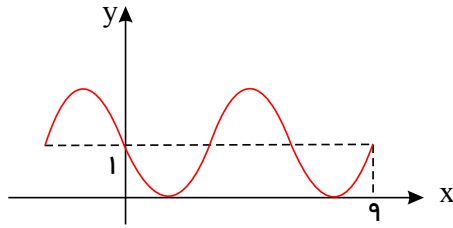
۱۲ اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - 2\sin^2 x$ به صورت زیر باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟



- ① π
- ② $-\pi$
- ③ $\frac{\pi}{2}$
- ④ $-\frac{\pi}{2}$

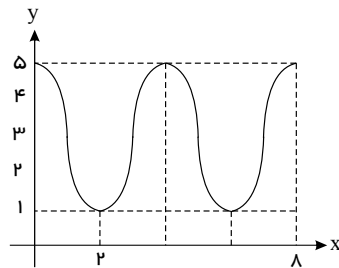


۱۳) نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = a + \cos(-\frac{1}{2} + bx)\pi$ می‌باشد. حاصل $f(29)$ کدام است؟



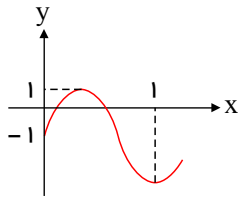
- ① $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ② $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{3}{2}$

۱۴) نمودار معادله $y = a \cos b\pi x + 3$ مطابق شکل زیر است؛ حاصل $a + b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟



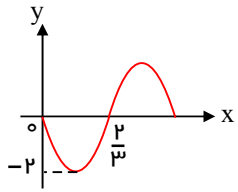
- ① $\frac{5}{2}$
- ② $\frac{7}{2}$
- ③ $\frac{9}{2}$
- ④ ۱

۱۵) شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



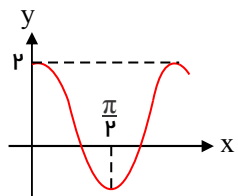
- ① ۲٫۵
- ② ۳
- ③ ۳٫۵
- ④ ۴

۱۶) اگر نمودار تابع $y = a \sin b\pi x$ به صورت زیر باشد، مقدار ab کدام است؟



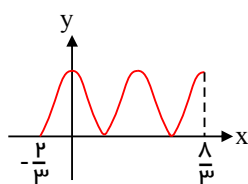
- ① -۳
- ② $-\frac{3}{2}$
- ③ $-\frac{4}{3}$
- ④ $-\frac{4}{3}$

۱۷) اگر نمودار تابع $y = a \cos bx$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام مقدار برای $a + b$ ممکن است؟



- ① ۳
- ② ۲
- ③ ۶
- ④ ۴

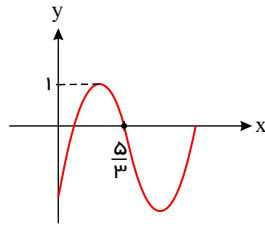
۱۸) شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = 3 + a \cos(b\pi x)$ است، حاصل $(a + 2b)$ برابر با کدام گزینه می‌تواند باشد؟



- ① ۳
- ② -۳
- ③ -۶
- ④ ۶

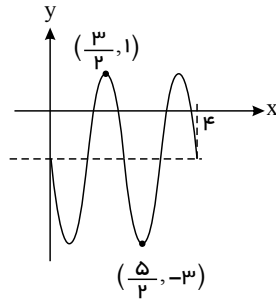


۱۹) اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin(b\pi x) - 1$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام گزینه می‌تواند باشد؟



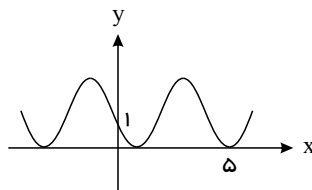
- ۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳/۲
۴) -۱/۲

۲۰) شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos \pi(\frac{3}{4} + bx) + c$ است. حاصل abc کدام است؟



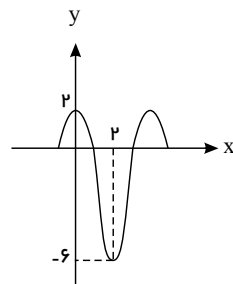
- ۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۲۱) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - \cos(\pi(\frac{1}{4} + bx))$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟



- ۱) صفر
۲) ۱٫۵
۳) ۱
۴) ۰٫۵

۲۲) اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{3} - bx) + c$ باشد، مقدار تابع به ازای $x = \frac{7}{3}$ کدام است؟



- ۱) $-2\sqrt{3} - 2$
۲) $2\sqrt{3} - 2$
۳) -۴
۴) $-3\sqrt{3}$

۲۳) کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \sin(x - \frac{3\pi}{4}) - 2 \cos(\frac{7\pi}{4} + x)$ با دامنه $[-\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ نادرست است؟

- ۱) نمودار، ۳ بار محور x را قطع می‌کند.
۲) اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار f برابر با ۶ است.
۳) نمودار f در بازه $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ بالای محور x قرار دارد.
۴) خط $y = -1$ در دو نقطه نمودار را قطع می‌کند.

۲۴) اگر تابع $f(x) = 5 \sin 3(\frac{\pi}{2}x - c)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ ماکسیمم شود، طول نقطه مینیمم آن، کدام می‌تواند باشد؟ (c ، عدد ثابت است).

- ۱) $-\frac{5}{6}$
۲) $\frac{7}{6}$
۳) $\frac{11}{6}$
۴) $\frac{4}{3}$



۲۵) اگر ماکسیمم و دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = -3 \cos 4x$ را به ترتیب A و B بنامیم، حاصل $A \times B$ کدام است؟

① $\frac{3\pi}{2}$

② 2π

③ 3π

④ $\frac{9\pi}{4}$

پاسخنامه تشریحی

۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر 4π است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow 2 = \frac{1}{|m|} \rightarrow |m| = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است فرقی نمی‌کند که $m = \frac{1}{2}$ یا $m = -\frac{1}{2}$ باشد.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

$$\rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

۲ می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \sin bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = 3, m = -3$$

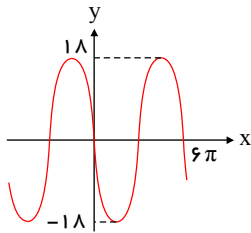
از طرفی تابع در همسایگی راست $x = 0$ نزولی است پس $m > 0$ است یعنی $m = 3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$$

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{5\pi}{2} = 1 - \sin\left(2\pi + \frac{1\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$= 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳



در توابع $y = b \sin ax$ و $y = b \cos ax$ دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ ، ماکسیمم برابر $|b|$ و مینیمم برابر $-|b|$ است.

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر 6π و ماکسیمم آن برابر 1.8 است. پس با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{3} \rightarrow a = \pm \frac{1}{3} \\ |b| = 1.8 \rightarrow b = \pm 1.8 \end{cases}$$

چون نمودار در همسایگی مبدأ نزولی است، پس دقیقاً یکی از a یا b منفی و دیگری مثبت است.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \rightarrow a + b = -\frac{5}{3}, \\ b = -1.8 \end{cases}, \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \rightarrow a + b = \frac{5}{3} \\ b = 1.8 \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر $-\frac{5}{3}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$\frac{T}{2} = 1 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow y = 1 + a \cdot \cos(\pm\pi x) = 1 + a \cdot \cos \pi x$$

از طرفی $f(1) = 3$ ، بنابراین داریم:

$$3 = 1 + a \cos(\pi(1)) \Rightarrow 3 = 1 + a \cos(\pi) \Rightarrow 3 = 1 + a(-1) \Rightarrow a = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$f(x) = -2 + a \cos(\pi + \pi bx) \rightarrow f(x) = -2 - a \cos(\pi bx)$$

$$\text{داریم: } -1 \leq \cos(\pi bx) \leq 1 \xrightarrow{a > 0} -a \leq a \cos(\pi bx) \leq a$$

منفی ضرب می‌کنیم

$$\rightarrow -a \leq -a \cos(\pi bx) \leq a \rightarrow -2 - a \leq -2 - a \cos(\pi bx) \leq -2 + a$$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-2 + a = 0$ است یعنی $a = 2$ می‌باشد پس $f(x) = -2 - 2 \cos(\pi bx)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دوره تناوب تابع برابر $\frac{4}{3}$ است و می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.



$$\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{|\pi b|} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{3}{2} \rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $a \times b = \pm 3$ است.

اولاً چون مقادیر تابع از نقطه‌ی $x = 0$ در حال افزایش است، بنابراین $b > 0$. از طرفی کم‌ترین مقدار تابع صفر است. در نتیجه: **۱ ۲ ۳ ۴ ۶**

$$-1 \leq \sin b\pi x \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a + \sin b\pi x \leq a + 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

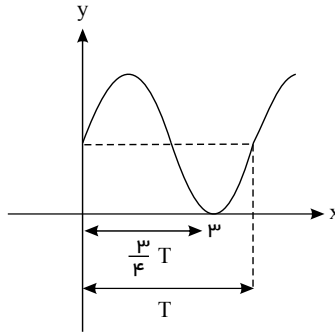
از طرفی با توجه به شکل $\frac{3}{4}T = 3$ و در نتیجه $T = 4$ است.

دوره‌ی تناوب $y = \sin bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b>0} b = \frac{1}{2}$$

پس $a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ است.

به شکل دقت کنید:



می‌دانیم که دوره‌ی تناوب تابع $y = k \sin ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۷**

باتوجه به شکل:
$$\begin{cases} f(0) = 4 \rightarrow 2m = 4 \rightarrow m = 2 \\ T + \frac{T}{4} = 9 \rightarrow 2T + T = 18 \rightarrow 3T = 18 \rightarrow T = 6 \end{cases}$$

$$T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|n\pi|} = 6 \rightarrow \frac{2}{|n|} = 6 \rightarrow |n| = \frac{1}{3} \rightarrow n = \pm \frac{1}{3}$$

چون نمودار در همسایگی $x = 0$ صعودی است پس فقط $n = \frac{1}{3}$ قابل قبول است بنابراین $mn = \frac{2}{3}$ است.

می‌دانیم $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$ بنابراین $y = b \sin ax$ است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۸**

از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = b \sin ax$ به صورت $\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

همچنین از روی نمودار تابع دوره‌ی تناوب برابر است با 4π در نتیجه:

$$\frac{2\pi}{|a|} = 4\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار $f(\pi) = -2$ می‌باشد.

$$f(\pi) = b \sin a\pi \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} b \sin \frac{\pi}{2} = b = -2 \rightarrow ab = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ **۱ ۲ ۳ ۴ ۹**

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$$

دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است بنابراین دوره‌ی تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ است.

نمودار تابع از نقطه‌ی 0° می‌گذرد پس این نقطه در تابع صدق می‌کند. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰**

صدق
$$\begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \rightarrow 4 = a + \sin 0 \rightarrow a = 4$$

باتوجه به شکل، فاصله‌ی ۱ تا ۷ دو برابر دوره‌ی تناوب است و می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = k \sin ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.



$$2T = 7 - 1 \rightarrow 2T = 6 \rightarrow T = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|} \rightarrow 3 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \rightarrow 3 = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2}{3} \rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$$

$$ab = (4) \left(\frac{-2}{3} \right) = \frac{-8}{3}$$

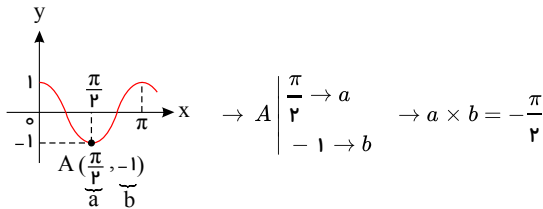
$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{3} + bx\right) \xrightarrow{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \alpha} f(x) = a \cos bx$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \\ -2 \end{array} \right\} \text{صدق} \rightarrow -2 = a \cos 0 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

$$\frac{3T}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3$$

$$\text{پس: } f(x) = -2 \cos(\pm 3x) \xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos \alpha} f(x) = -2 \cos 3x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{4} = -2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi, \quad Max = 1, \quad Min = -1$$



$$y = a + \cos\left(-\frac{1}{3} + bx\right)\pi \rightarrow y = a + \cos\left(\frac{-\pi}{3} + \pi bx\right)$$

$$\rightarrow y = a + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi bx\right) \xrightarrow{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin \alpha} y = a + \sin \pi bx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \frac{3}{2}T = 9 \rightarrow T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون بلافاصله بعد از محور عرض، نمودار نزول پیدا می‌کند، بنابراین ضریب کمان سینوس باید منفی باشد پس $b = -\frac{1}{3}$ است.

$$f(x) = a + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = a + 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{3}x$$

$$\rightarrow f(29) = 1 - \sin \frac{29\pi}{3} = 1 - \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \\ 5 \end{array} \right\} \text{صدق در تابع} \rightarrow 5 = a(1) + 3 \rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$$

چون نمودار تابع در $x = 0$ نزولی است پس فقط $b = -\frac{2}{3}$ قابل قبول است.

1 2 3 4 11

نمودار تابع از نقطه $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ عبور می‌کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{می‌دانیم: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 12$$

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم: $y = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y = \cos ax$ از رابطه‌ی $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید و Max تابع $y = \cos 2x$ برابر 1 و Min آن برابر -1 است.

شکل تابع را رسم کرده و مختصات نقطه‌ی A را پیدا می‌کنیم:

1 2 3 4 13

$$y = \sin ax \xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|} \quad \text{می‌دانیم:}$$

1 2 3 4 14



طبق نمودار فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = 2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

$$2 - 0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

در گزینه‌ها نیست

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

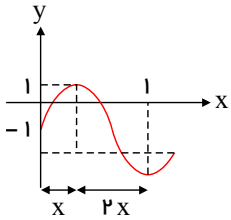
دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin x$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} \quad \text{می‌دانیم: } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{15}$$

نکته: در منحنی‌های متناوب دو برابر فاصله‌ی طولی ماکسیمم و مینیمم، طول دوره‌ی تناوب آن تابع است.

باتوجه به شکل دوره‌ی تناوب تابع برابر $4x$ می‌باشد $3x = 1$ است، پس $x = \frac{1}{3}$ به دست می‌آید بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $T = 4x = \frac{4}{3}$ خواهد بود. از

ضابطه‌ی تابع دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید:



$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر $b = \frac{3}{2}$ باشد، مقدار تابع در $x = \frac{1}{3}$ برابر 1 است بنابراین همین عدد برای b صحیح است.

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

توجه کنید که اگر $b = \frac{-3}{2}$ باشد به طور مشابه $a = -2$ به دست می‌آید که $a + b = -\frac{7}{2}$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad \text{نکته ۱: دوره تناوب } y = a \sin(bx + c) \text{، برابر است با: } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{16}$$

نکته ۲: بردتابع $y = a \sin(bx + c)$ ، عبارت است از: $(-|a|, |a|)$

یعنی حداقل مقدار تابع برابر $-|a|$ و حداکثر مقدار آن برابر $|a|$ است.

با توجه به نمودار، دوره تناوب $T = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \quad \text{طبق نکته ۱ داریم:}$$

$$\frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2}$$

کمترین مقدار تابع برابر -2 است، پس از نکته ۲ داریم:

$$|ab| = |a||b| = 3$$

با توجه به این که اولین طاق نمودار زیر محور x هاست، باید حداقل یکی از دو عدد a و b منفی باشد، بنابراین $ab = -|ab| = -3$

$$\text{می‌دانیم: دوره‌ی تناوب تابع } y = k \cdot \cos ax \text{ برابر } T = \frac{2\pi}{|a|} \text{ است. } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{17}$$

باتوجه به شکل، نقطه‌ی $(0, 2)$ عضو تابع است پس در آن صدق می‌کند:

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cos 0 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی نصف دوره‌ی تناوب تابع باتوجه به شکل برابر $\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

هر دو مقدار b قابل قبول است، پس $a + b$ می‌تواند برابر مقادیر صفر یا ۴ باشد.

$$\text{یادآوری: دوره‌ی تناوب تابع } y = \cos kx \text{ برابر } \frac{2\pi}{|k|} \text{ است. } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{18}$$

از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که، نمودار داده شده در بازه‌ی $[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ به تعداد ۲٫۵ مرتبه تکرار شده است، لذا اگر دوره‌ی تناوب این تابع را T فرض کنیم داریم:



$$2,5T = \frac{8}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2,5T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{3} \quad (1)$$

با توجه به مطلب گفته شده داریم:

$$y_1 = \cos(b\pi x) \xrightarrow{(1)} T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \quad (2)$$

همچنین از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ است. لذا:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(2)} f\left(-\frac{2}{3}\right) &= 3 + a \cos\left(\pm \frac{3}{2}\pi \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = 3 + a \cos(\pm\pi) = 3 - a = 0 \\ \Rightarrow a &= 3 \Rightarrow a + 2b = 3 + 2\left(\pm \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + 2b = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ ، بیشترین مقدار تابع از رابطه $|a| + c$ بدست می‌آید. **۱۹**

$$|a| + c = 1 \rightarrow |a| - 1 = 1 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

شکل داده شده فرمت خود سینوس را دارد بنابراین a و b هم علامتند ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که a و b هر دو مثبت هستند.

$$f(x) = 2 \sin(b\pi x) - 1 \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} \frac{5}{3} \\ 0 \end{array} \right\} \text{صدق}} 0 = 2 \sin \frac{\delta b \pi}{3} - 1 \rightarrow \sin \frac{\delta b \pi}{3} = \frac{1}{2}$$

مقدار سینوس برابر $\frac{1}{2}$ شده است برای x های مثبت این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ اتفاق می‌افتد و با توجه به شکل تابع، باید $\frac{\delta b \pi}{3}$ برابر $\frac{\delta \pi}{6}$ باشد.

$$\frac{\delta b \pi}{3} = \frac{\delta \pi}{6} \rightarrow \frac{b}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند، $b = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

ابتدا π را در پرانتز ضرب می‌کنیم. **۲۰**

$$f(x) = a \cos\left(\frac{3\pi}{2} + b\pi x\right) + c = a \sin(b\pi x) + c$$

با توجه به این که فاصله طولی نقطهٔ ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است، پس:

$$T = 2 \times \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

و همچنین از نقاط $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ می‌توانیم برای پیدا کردن a و c استفاده کنیم.

حالت اول: $b = 1$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 1 \Rightarrow a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= -3 \Rightarrow a \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + c = -3 \Rightarrow a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

حالت دوم: $b = -1$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= -3 \Rightarrow -a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت $abc = 2$ است.

ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر کنیم. **۲۱**

$$f(x) = a - \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a + \sin b\pi x$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(0, 1)$ روی نمودار قرار دارد:

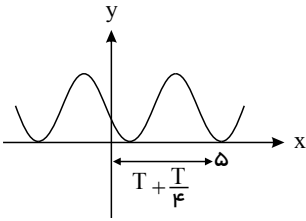
$$f(0) = 1 \Rightarrow a + \sin 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره‌ی تناوب تابع را می‌یابیم:

$$T + \frac{T}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}T = 5 \Rightarrow T = 4$$

دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$



چون بلافاصله بعد از محور y ها نمودار در حال کاهش است، پس $b = -\frac{1}{4}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a + b = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0.75$$

ابتدا ضابطه تابع را ساده تر کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲**

$$y = a \sin \pi \left(\frac{1}{4} - bx\right) + c \Rightarrow y = a \sin \left(\frac{\pi}{4} - b\pi x\right) + c \Rightarrow y = a \cos b\pi x + c$$

فاصله افقی بین مینیمم و ماکزیمم متوالی برابر $\frac{T}{4}$ است. پس داریم:

$$\frac{T}{4} = 2 \Rightarrow T = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|} = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

هردوی $\pm \frac{1}{4}$ قابل قبول است، زیرا $\cos(-x) = \cos x$. مطابق شکل ماکسیمم تابع ۲ و مینیمم تابع -۶ است. پس:

$$\left. \begin{aligned} \text{Max} &= 2 \rightarrow |a| + c = 2 \\ \text{Min} &= -6 \rightarrow -|a| + c = -6 \end{aligned} \right\} \rightarrow c = -2, a = \pm 4$$

شکل داده شده، فرمت تابع $\cos x$ را دارد. پس فقط $a = 4$ صحیح است و داریم:

$$f(x) = 4 \cos \frac{\pi}{4} x - 2 \xrightarrow{x = \frac{y}{3}} f\left(\frac{y}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{y}{3}\right) - 2 = 4 \cos \frac{y\pi}{6} - 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{y}{3}\right) = 4 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 4\left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) - 2 = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -2\sqrt{3} - 2$$

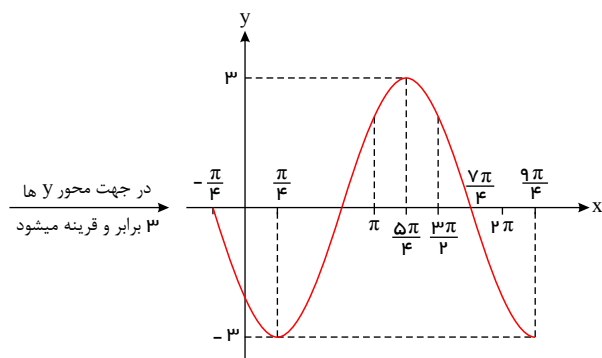
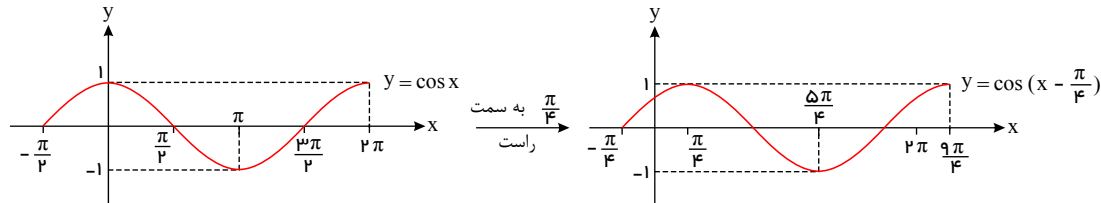
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{y\pi}{4} + x\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(\frac{y\pi}{4} + x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$





اگر خط $y = -1$ رسم کنیم در بازه گفته شده نمودار را در سه نقطه قطع می کند، پس گزینه ۴، نادرست است.

دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx + c$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۴)

$$f(x) = 5 \sin 3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right) = 5 \sin\left(\frac{3\pi}{2}x - 3c\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{2}\right|} = \frac{4}{3}$$

فاصله طولی نقاط ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر $\frac{T}{2}$ است پس اگر از $x = \frac{1}{3}$ به اندازه $\frac{T}{2}$ به سمت راست یا چپ برویم به نقطه مینیمم می رسیم.

$$x_{Min} = x_{Max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

در توابع به فرم $y = a \cos bx$, $y = a \sin bx$ دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ ، Max تابع برابر $|a|$ و Min تابع برابر $-|a|$ می باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۵)

$$y = -3 \cos 4x \rightarrow \begin{cases} A = |-3| = 3 \\ B = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow A \times B = \frac{3\pi}{2}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴

۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴

۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴

۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴