

بِسْمِ

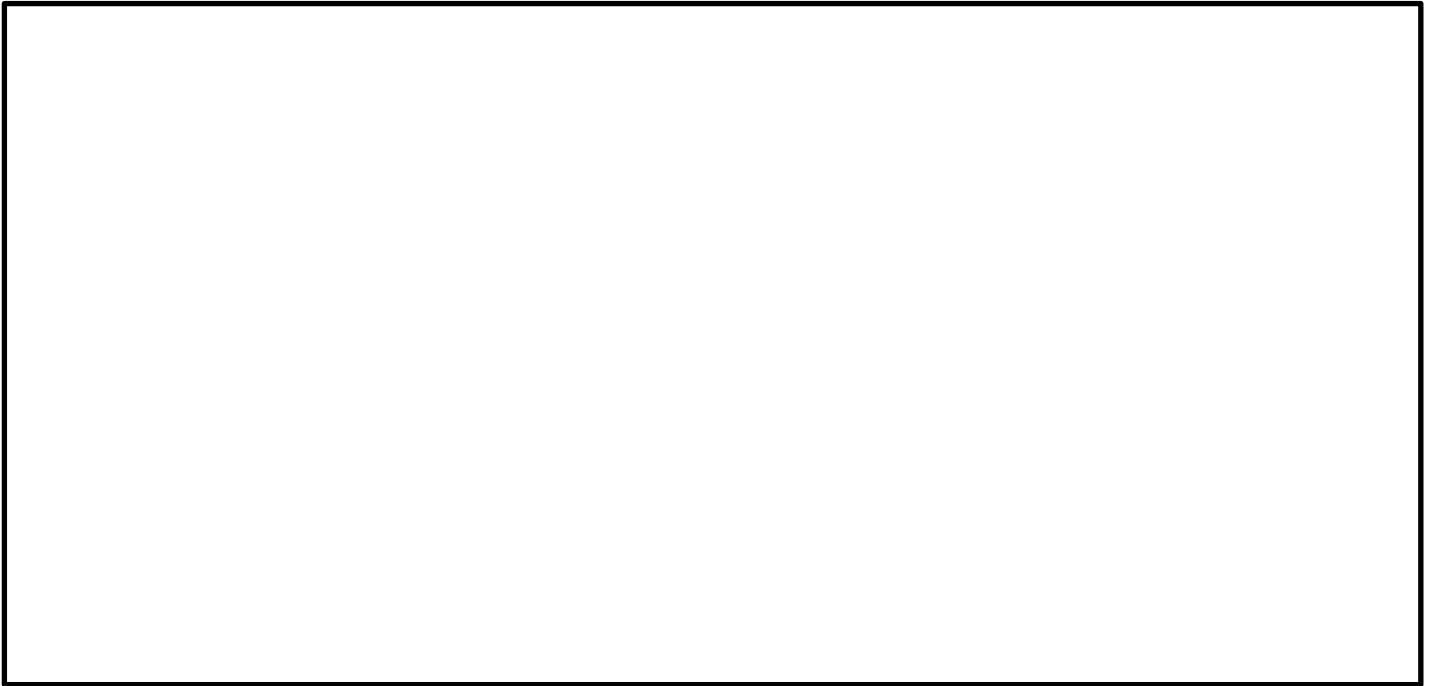


مد و پیوستگی

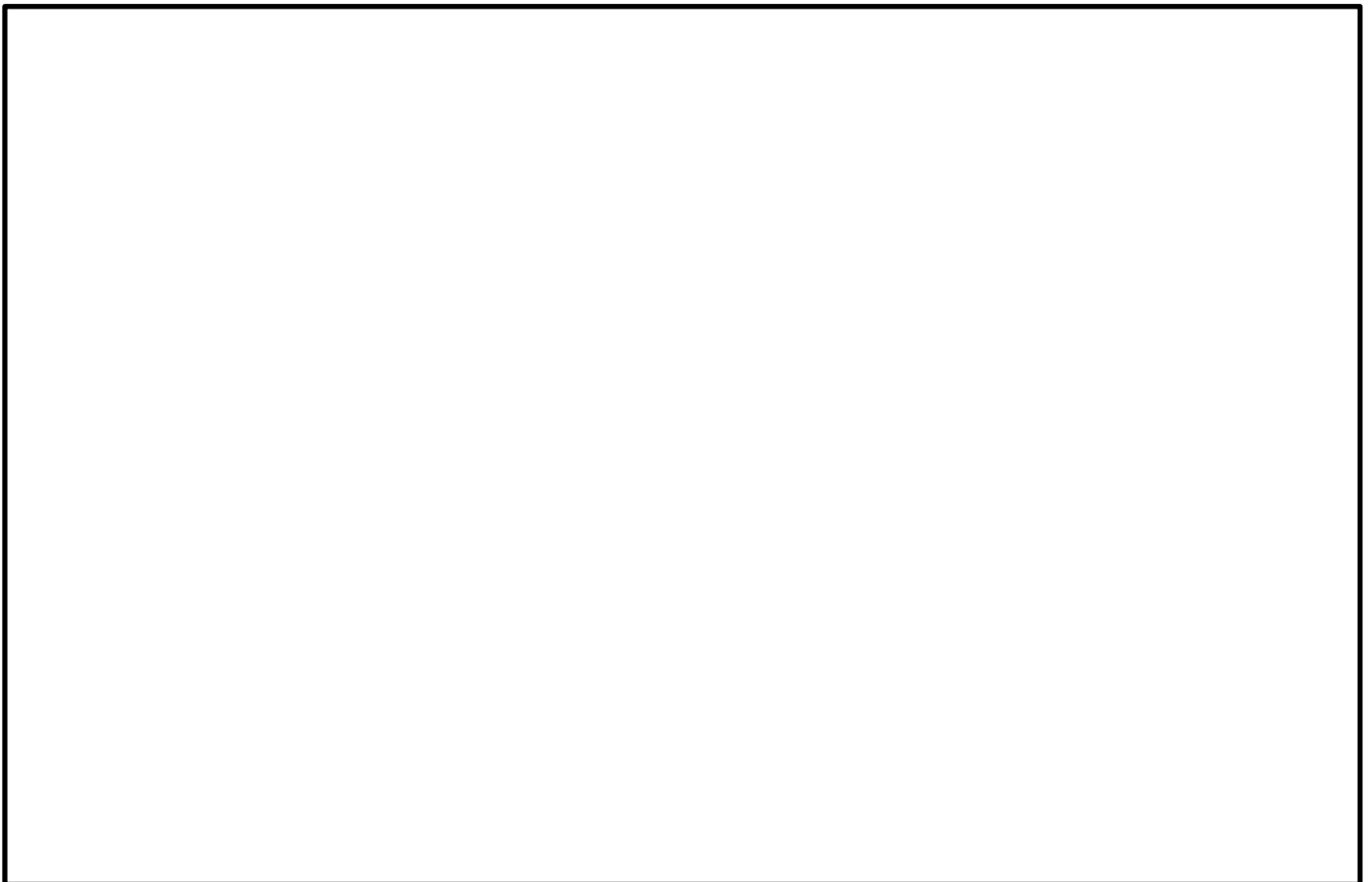


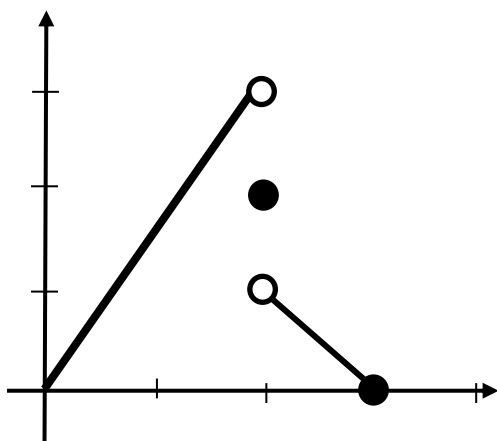
حد ( *limit* )

مفهوم میل کردن



میل کردن راست و چپ





$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

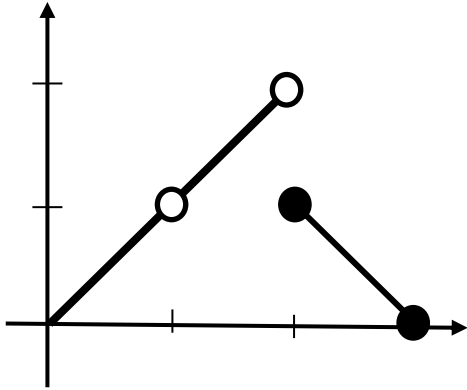
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$f(2) =$$



## زمانی که حد وجود دارد که حد چپ و راست مساوی باشد



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$

۱- تابع زیر در چند نقطه حد ندارد؟

---

---

---

---

---

---

---

---

۲- تابعی رسم کنید که در  $x = 0$  حد چپ داشته باشد و حد نداشته باشد؟

---

---

---

---

---

---

---

---

۳- حد تابع  $y = \sqrt{x}$  را در نقطه به طول صفر بررسی کنید.

---

---

---

---

---

---

---

---

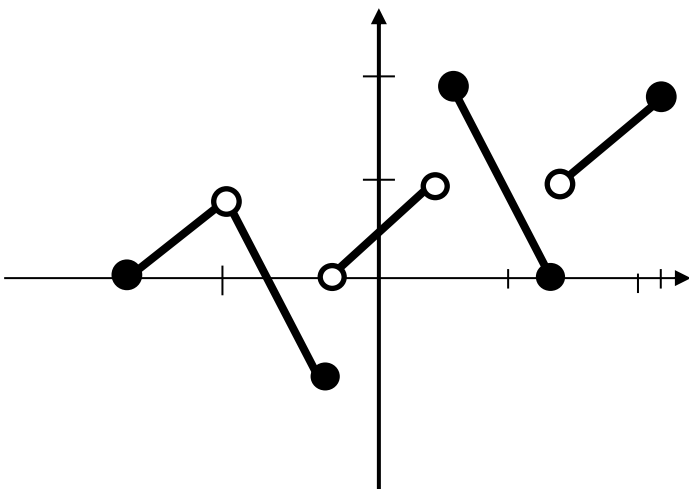


۴- حد تابع  $y = |x|$  را در نقطه به طول صفر بررسی کنید.

Handwriting practice lines for the first problem.

۵- حد تابع  $y = [x]$  را در نقطه به طول صفر بررسی کنید.

Handwriting practice lines for the second problem.



$a$	حد چپ	حد راست	حد	$f(a)$

$x = 3^+$



$-x =$



$$x = (-1)^{-}$$

→

$$-\frac{3}{x} =$$

$$x = (-2)^{-}$$

→

$$x^2 =$$

$$x = 1^+$$

→

$$\frac{1}{x} =$$

$$x = 1^+$$

→

$$[x] =$$

$$x = 2^+$$

→

$$2x + 3 =$$

$$x = 2^+$$

→

$$-2x + 3 =$$



$$x \rightarrow 0$$

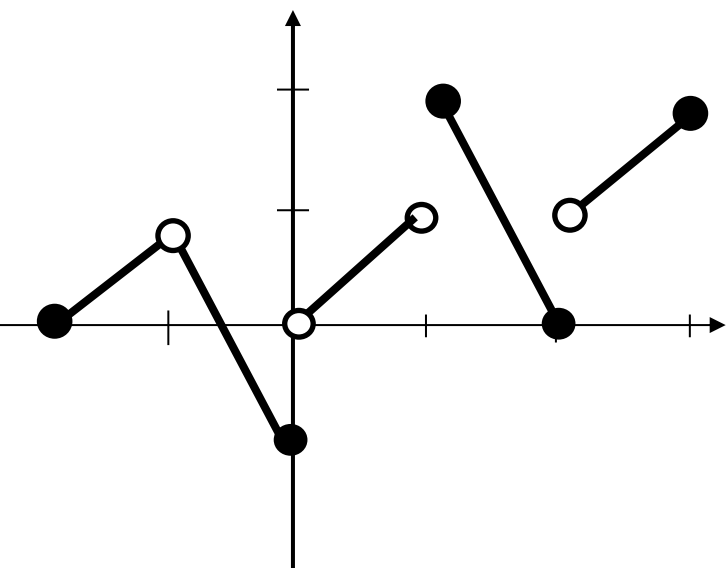
→

$$x^2 \rightarrow$$

$$x \rightarrow 2^-$$

→

$$x^2 - 4x + 1 =$$

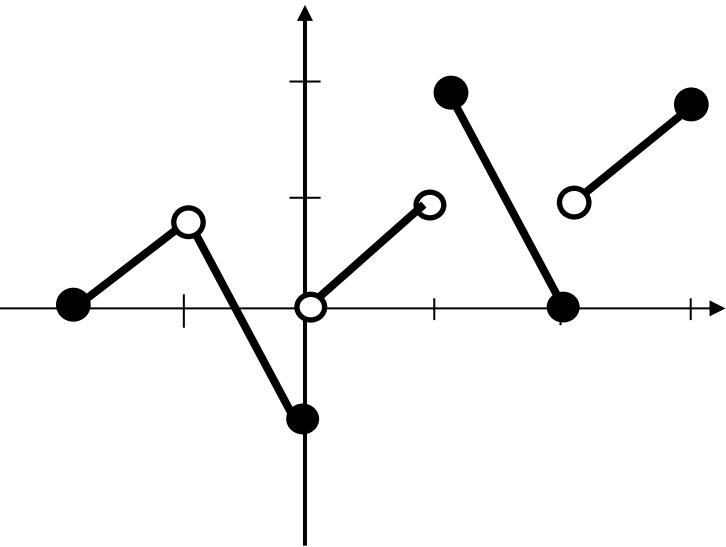


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x + 1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) =$$



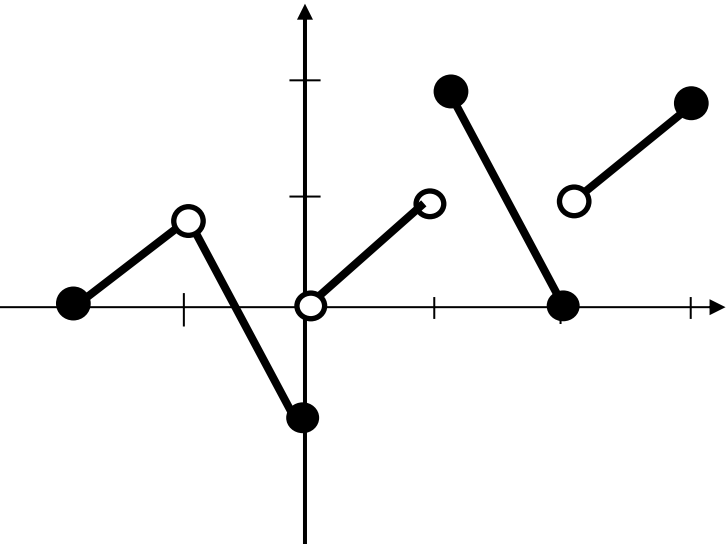
$$\lim_{x \rightarrow \cdot} f(\gamma - x^\gamma) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(\gamma - x^\gamma) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} [f(x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\cdot)^+} [f(x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\cdot)^-} f(-x + \cdot) =$$



$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} f(x^\gamma - \gamma x + \gamma) =$$

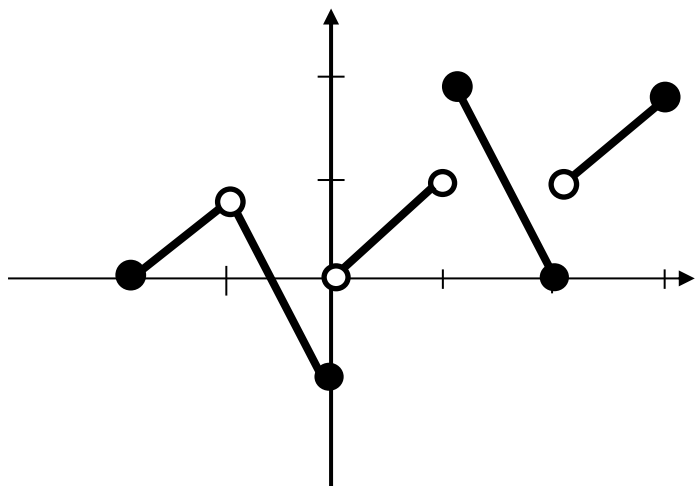
$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} [f(x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(f(x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\cdot)^+} f(f(x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(\sin x) =$$





$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] =$$

$$[\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-f(x)) =$$

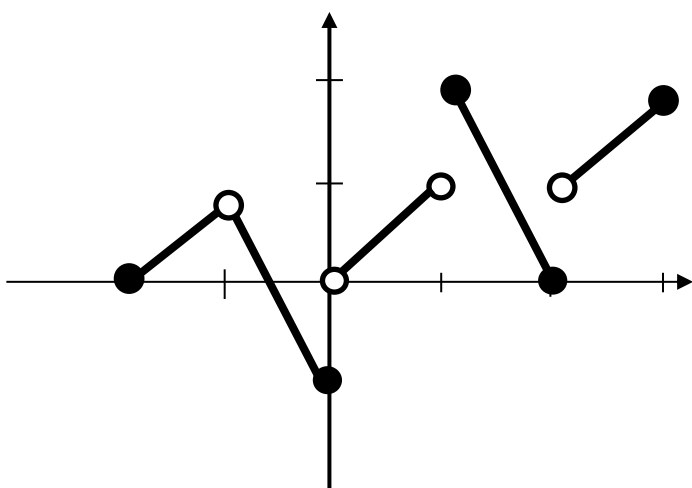
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(f(x)) =$$

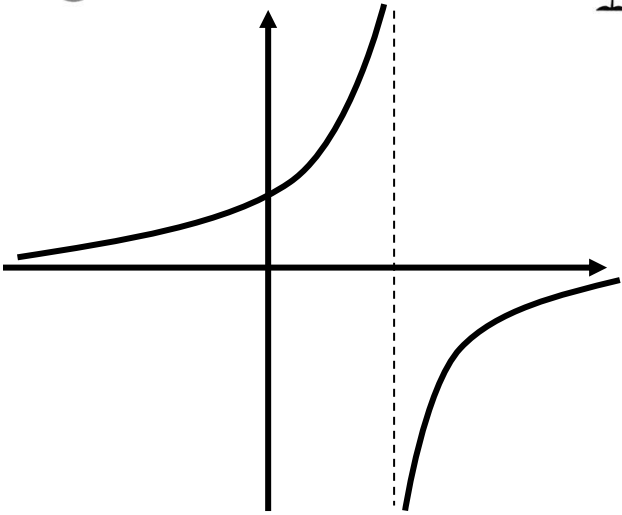
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x^2 - 4x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] =$$

$$[\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)] =$$

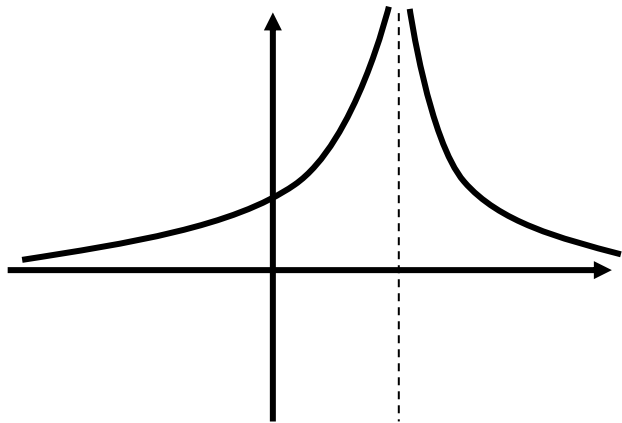
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f([x]) =$$





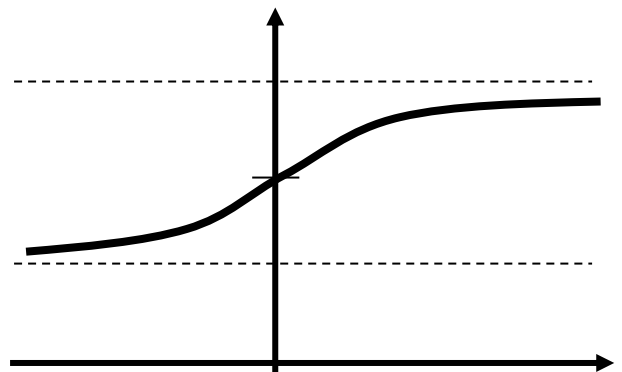
$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} f(x) =$$



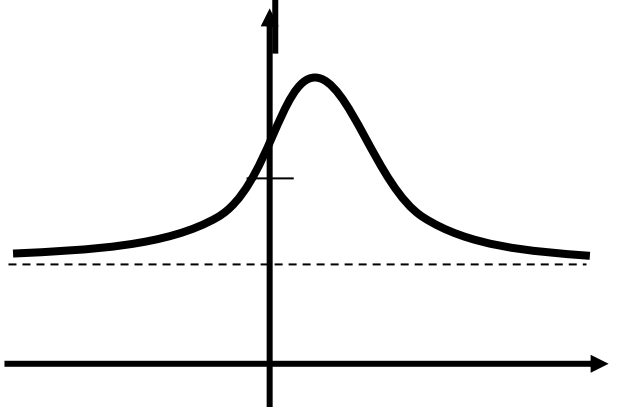
$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

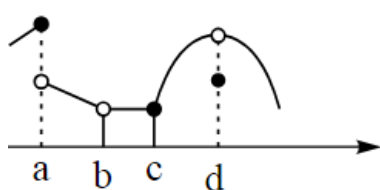
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

توابع در چه نقاطی حد ندارند



۱- نمودار تابع  $f$  به صورت روبرو است. این تابع در چند نقطه از

نقاط  $\{a, b, c, d\}$  حد ندارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: ( )

۲- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر داده شده است، با توجه به شکل حد

های داده شده را محاسبه کنید.

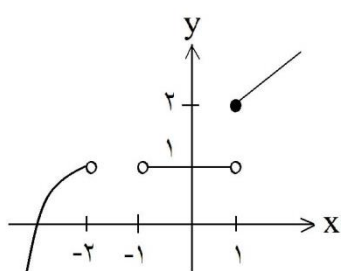
الف)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

د)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

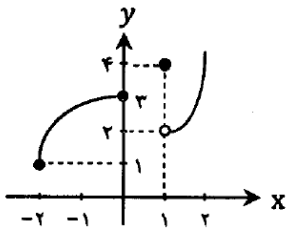
پاسخ:





۳- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر داده شده است، با توجه به شکل حد های داده شده را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(1)$$



پاسخ:

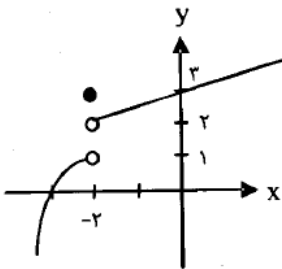
۴- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر داده شده است، با توجه به شکل حد های داده شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \text{ (الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) \text{ (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ (ج)}$$

پاسخ:



۵- حدود زیر را با توجه به نمودار محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) \text{ (۱)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)] \text{ (۲)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ (۳)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] \text{ (۴)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \text{ (۵)}$$

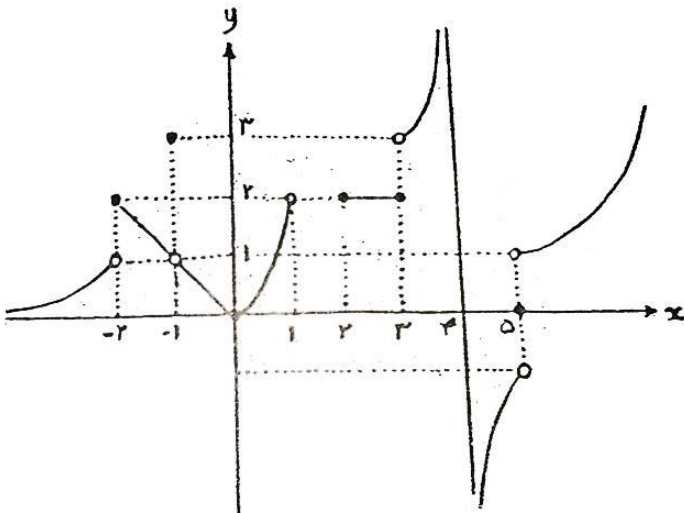
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \text{ (۶)}$$

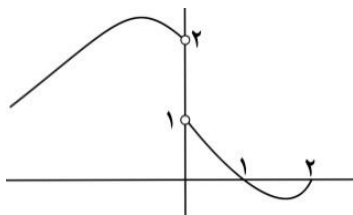
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ (۷)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [-f(x)] \text{ (۸)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) \text{ (۹)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(f(x)) \text{ (۱۰)}$$





۶- اگر شکل روبرو تابع  $y = f(x)$  باشد، مقادیر زیر کدام است؟

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x - 1)$

(الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(د)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x)$

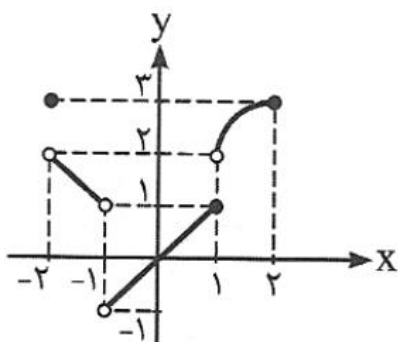
(ج)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x))$

(و)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(1 - x^2)$

(ه)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x))$

پاسخ:

۷- اگر شکل روبرو تابع  $y = f(x)$  باشد، مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f\left(-\frac{x}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x - 1)$  کدام است؟



(۴) ۳

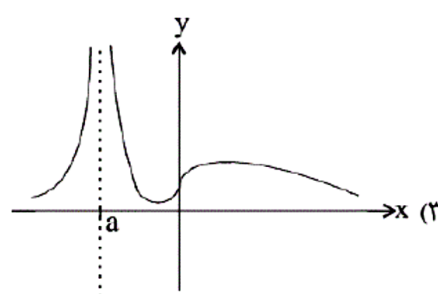
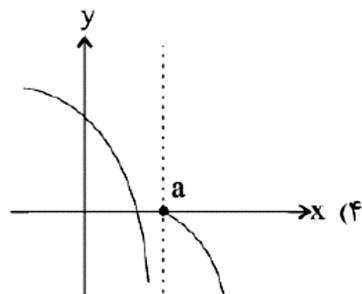
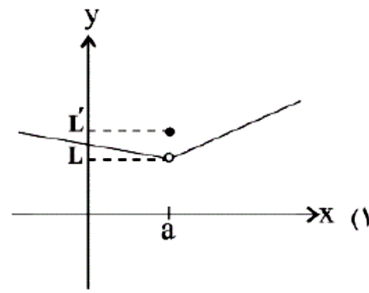
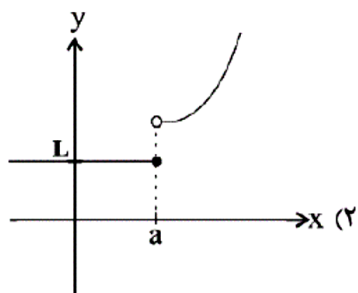
(۳) ۲

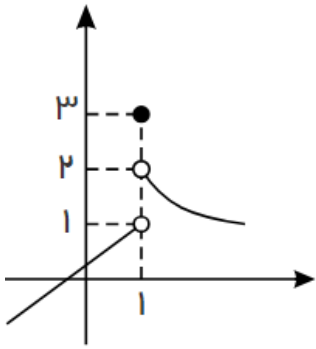
(۲) -۱

(۱) ۱

پاسخ ( )

۸- کدام یک از توابع زیر در نقطه  $a$  دارای حد است؟





۹- اگر شکل روبرو تابع  $y = f(x)$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{2x-1}\right)$  کدام است؟

۱ (۱)    ۲ (۲)    ۳ (۳)    ۴ این حد وجود ندارد.

پاسخ: ( )

۱۰- توابع زیر را رسم کنید و با توجه به نمودار حد چپ و راست و حد تابع را در نقطه ی داده شده پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ -x + 5 & x > 1 \end{cases} \text{ (الف)} \quad x = 2 \text{ و } x = 1$$

پاسخ: ( )

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ (ب)} \quad x = 4 \text{ و } x = 0$$

پاسخ: ( )

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \text{ (ج)} \quad x = 0$$

پاسخ: ( )



$$x = 0 \text{ در } f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ (د)}$$

پاسخ: ( )

۱۱- با توجه به تابع  $f(x) = \sqrt{x+4}$  چه تعداد از موارد زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0 \text{ (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = 0 \text{ (الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \text{ (د)}$$

$$f(-4) = 0 \text{ (ج)}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (صفر)

پاسخ: ( )

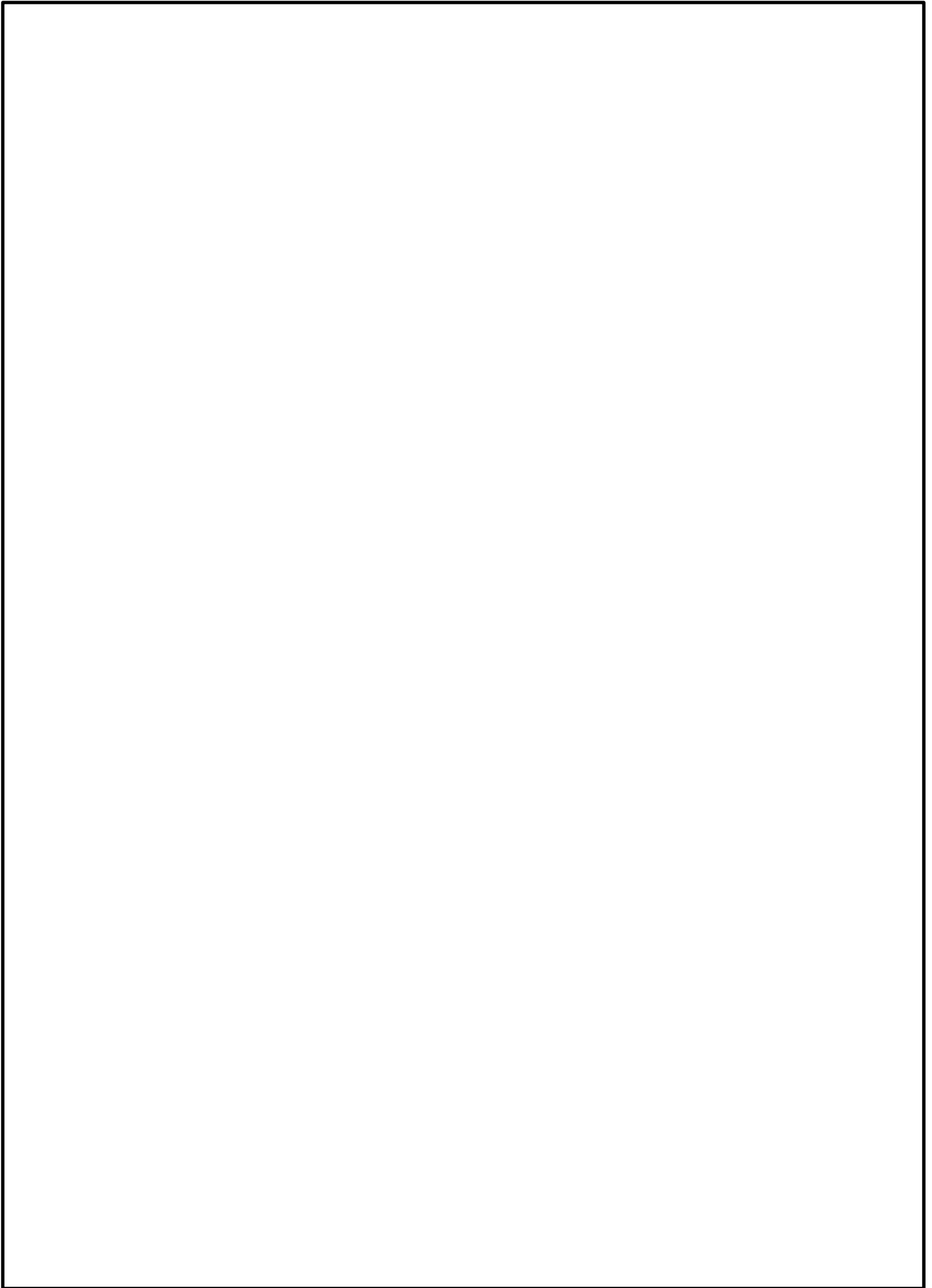


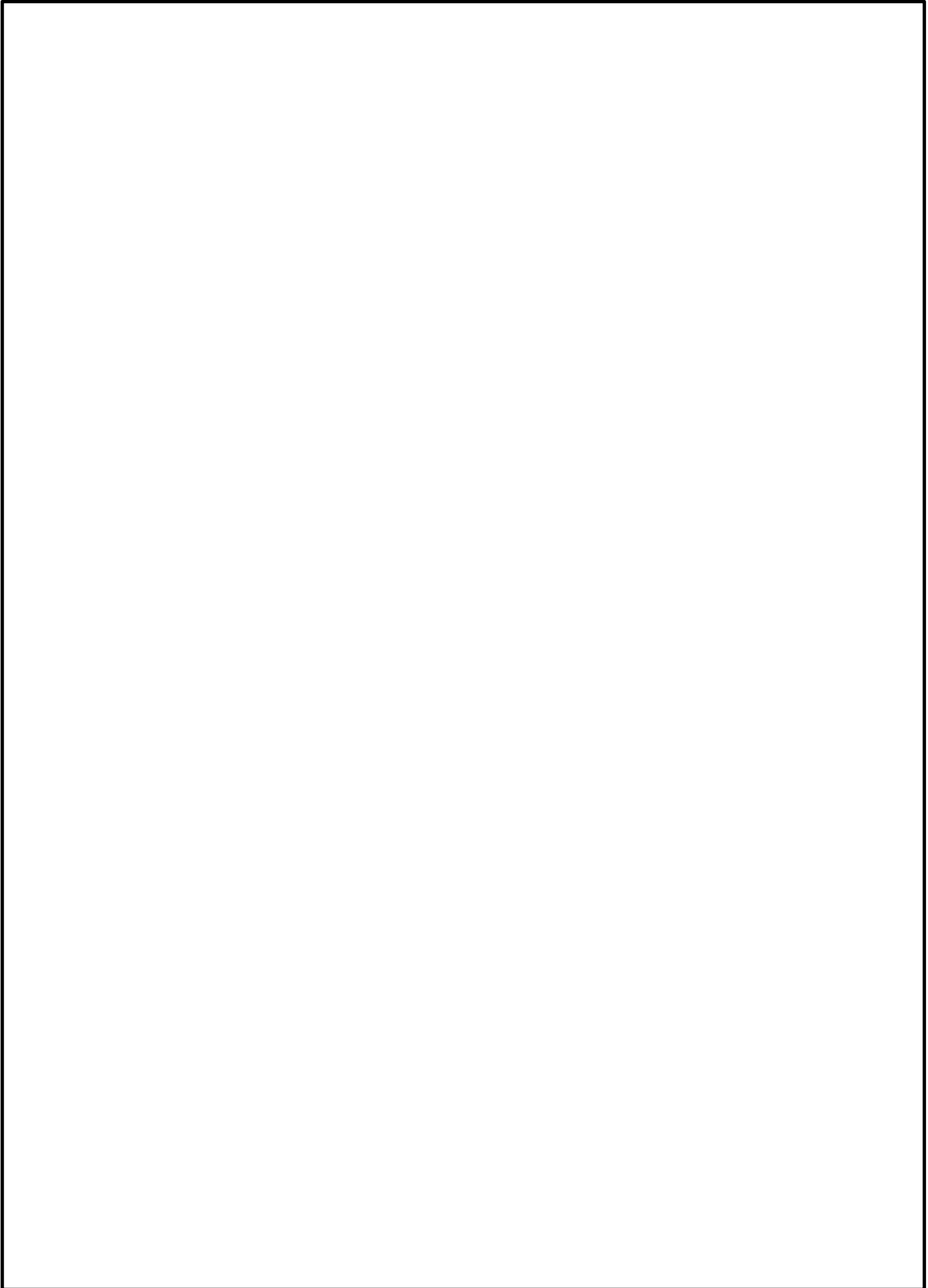
قضایای حد





A large empty rectangular box with a black border, intended for writing or drawing.







۱۲- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 3 \cos x}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 2 \cos^3 x}{\tan^2 x} =$$

۱۳- اگر  $f$  در نقطه  $x = 5$  حد داشته باشد و بدانیم  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4f(x) - 3}{2f(x) + 1} = 7$  ، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ ( )

۱۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) + 2L^2 - 13}{f(x) + L + 1} = L$  ، آنگاه مقدار مثبت  $L$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ ( )



حد توابع کسری

حد های زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[r]{x} - 1}$$

۱۵- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^r - 5x + 6}{x - 2} =$$

پاسخ:



$$۲) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6} =$$

پاسخ:

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1} =$$

پاسخ:

$$۴) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} =$$

پاسخ:

$$۵) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{2x-1}{2x}}{x^2 - 1} =$$

پاسخ:

$$۶) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x - 1}{3x^2 - 4x + 1} =$$

پاسخ:



حد های زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{x^2 - ۱}{\sqrt{x} - ۱} =$$

پاسخ:

$$۲) \lim_{x \rightarrow ۷} \frac{\sqrt{۳x+۴} - ۵}{x-۱} =$$

پاسخ:

$$۳) \lim_{x \rightarrow ۸} \frac{x-۸}{\sqrt[۳]{x}-۲} =$$

پاسخ:

$$۴) \lim_{x \rightarrow ۴} \frac{۳ - \sqrt{۲x+۱}}{۲ - \sqrt{x}} =$$

پاسخ:

$$۵) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sqrt{x^2+x+۱} - ۱}{x-۱} =$$

پاسخ:





۱۶- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{x^2 + x - 2}$  کدام است؟

پاسخ: ( )

۱۷- اگر  $\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt{4x+b}-2}{x} = a$  باشد، مقدار  $a$  و  $b$  کدام است؟

پاسخ: ( )

۱۸- حد عبارت  $\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^2+ax-4}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  عددی غیر صفر است. حد این عبارت وقتی  $x \rightarrow 6$  کدام است؟

است؟

$$\frac{1}{196} (4)$$

$$\frac{1}{98} (3)$$

$$\frac{1}{178} (2)$$

$$\frac{1}{54} (1)$$

پاسخ: ( )



۱۹- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})^2}{x + 1 - 2\sqrt{x}}$  کدام است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{16}{9} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

پاسخ: ( )

---

---

---

---

## مشتق و هوپیتال

مشتق = شیب خط مماس در ریاضی = سرعت در فیزیک (دوازدهم)

( مفهوم مشتق به طور کامل در فصل مشتق بررسی می شود )

$$\text{مشتق } f'(x) \rightarrow \text{تابع } f(x)$$

✓ قوانین مشتق گیری

تابع	مشتق
عدد	صفر
$Ax + B$	$A$
$x^n$	$nx^{n-1}$

• مثال: مشتق بگیرید.

۱)  $y = 4 \rightarrow$

۲)  $y = \sqrt{3} \rightarrow$

۳)  $y = 4x + 5 \rightarrow$

۴)  $y = 3 - 5x \rightarrow$

۵)  $y = x^4 \rightarrow$

۶)  $y = x^9 \rightarrow$

۷)  $y = 2x^7 \rightarrow$

۸)  $y = x^{7/5} \rightarrow$

۹)  $y = \sqrt{x} \rightarrow$



$$۱۰) y = \frac{1}{x} \rightarrow$$

$$۱۱) y = \sqrt[r]{x} \rightarrow$$

$$۱۲) y = \frac{x^{\Delta}}{f} \rightarrow$$

$$۱۳) y = \frac{r}{x^r} \rightarrow$$

قاعده هویپیتال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - 1}{x^r - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r + x^r - 2}{x^r - 3x^r + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x + \sqrt{x} - 6} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x^4 + \sqrt[3]{x} - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} =$$

تابع	مشتق
$u^n$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[3]{u}$	$\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

۱)  $y = (7x + 2)^5 \rightarrow$

۲)  $y = (x^2 + x)^4 \rightarrow$

۳)  $y = (x^3 + 5)^6 \rightarrow$

۴)  $y = (3x^4 - x)^5 \rightarrow$

۵)  $y = \sqrt{3x + 1} \rightarrow$



$$6) y = \sqrt{x^r - 3x} \rightarrow$$

$$7) y = \sqrt{x} \rightarrow$$

$$8) y = \sqrt[3]{x} \rightarrow$$

$$9) y = \sqrt[3]{4x - 1} \rightarrow$$

$$10) y = \sqrt{x^\Delta + x^r} \rightarrow$$

$$11) y = (\Delta x - x^r)^f \rightarrow$$

$$12) y = 3\sqrt[3]{x} \rightarrow$$

$$13) y = 4\sqrt{x} \rightarrow$$

$$14) y = \sqrt{x^r + 4x + 1} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + x^r}{\sqrt[3]{x^r + 7} + 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{\sqrt[3]{4x} - 2} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^3 - (1-3x)^5}{x} =$$

۲۰- (سراسری ۸۵) حد عبارت  $\frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$  وقتی  $x \rightarrow -1$  برابر کدام است؟

$\frac{5}{4}$  (۴)       $\frac{3}{4}$  (۳)       $-\frac{1}{4}$  (۲)       $-\frac{7}{4}$  (۱)

پاسخ: ( )

۲۱- (سراسری ۸۸) حد عبارت  $\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر کدام است؟

$4$  (۴)       $2$  (۳)       $-2$  (۲)       $-4$  (۱)

پاسخ: ( )

۲۲- (سراسری ریاضی ۹۰) حد عبارت  $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  برابر کدام است؟

$3$  (۴)       $2$  (۳)       $-2$  (۲)       $-3$  (۱)

پاسخ: ( )



۲۳- اگر فرض کنیم  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax + b} = 2$  مقدار  $2a + b$  کدام است؟

۴ (۴) -

۳ (۴)

۲ (۵) -

۱ (۵)

پاسخ: ( )

۲۴- حد عبارت  $\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^3+ax-4}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  عددی غیر صفر است. حد این عبارت وقتی  $x \rightarrow 6$  کدام

است؟

$\frac{1}{196}$  (۴)

$\frac{1}{98}$  (۳)

$\frac{1}{178}$  (۲)

$\frac{1}{54}$  (۱)

پاسخ: ( )

۲۵- اگر  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax + b - 1}{\sqrt{1+3x} - 1} = 2$  حاصل  $a + b$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: ( )





۲۶- (سراسری ۹۵ خارج) اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه  $b$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: ( )

۲۷- (سراسری ۹۳) حد راست عبارت  $\frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  برابر کدام است؟

$\frac{1}{6}$  (۴)

$\frac{1}{12}$  (۳)

$-\frac{1}{12}$  (۲)

$-\frac{1}{6}$  (۱)

پاسخ: ( )

۲۸- (سراسری ۹۸) حد عبارت  $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt{x}}$  وقتی  $x \rightarrow -8$  برابر کدام است؟

-۶ (۴)

-۱۲ (۳)

-۱۸ (۲)

-۲۴ (۱)

پاسخ: ( )



۲۹- حاصل  $\frac{1-\sqrt{3-\sqrt{2x}}}{5-\sqrt{4x^2+9}}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  برابر کدام است؟

(۴)  $-\frac{5}{32}$

(۳)  $-\frac{3}{16}$

(۲)  $\frac{5}{16}$

(۱)  $\frac{3}{8}$

پاسخ: ( )

۳۰- اگر حد  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^2+ax-4} = L$  موجود باشد،  $a$  و  $L$  چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(۱)  $a$  و  $L$  هر دو یک مقدار دارند. (۲)  $a$  یک مقدار و  $L$  دو مقدار دارد.

(۳)  $a$  بی شمار مقدار و  $L$  دو مقدار دارد. (۴)  $a$  و  $L$  بی شمار مقدار دارند.

پاسخ: ( )

۳۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{6}$

(۳)  $-\frac{1}{6}$

(۲)  $-6$

(۱)  $6$

پاسخ: ( )



۳۲- اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} a \left( \frac{1-x+\sqrt{x^2-b}}{\sqrt{x-1}} \right) = 2$  باشد، آنگاه حاصل  $a + b$  کدام است؟

$\sqrt{2} + 2$  (۴)

$\sqrt{2} + 1$  (۳)

$\sqrt{2} - 1$  (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

پاسخ: ( )

۳۳- (سراسری ریاضی ۹۹) حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}}$  کدام است؟

$-0.6$  (۴)

$-0.8$  (۳)

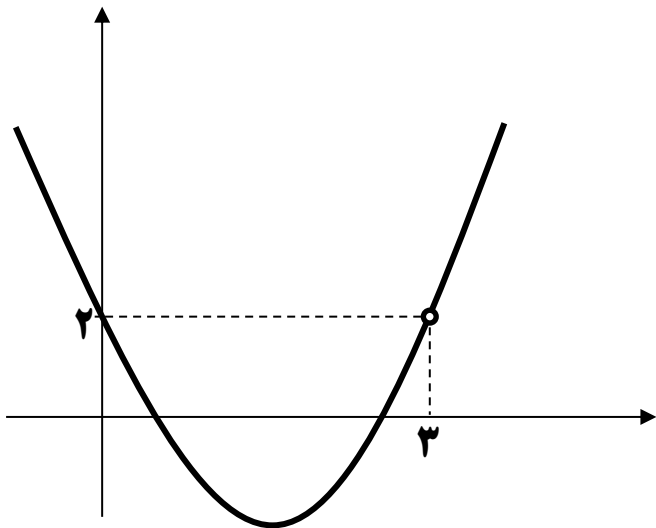
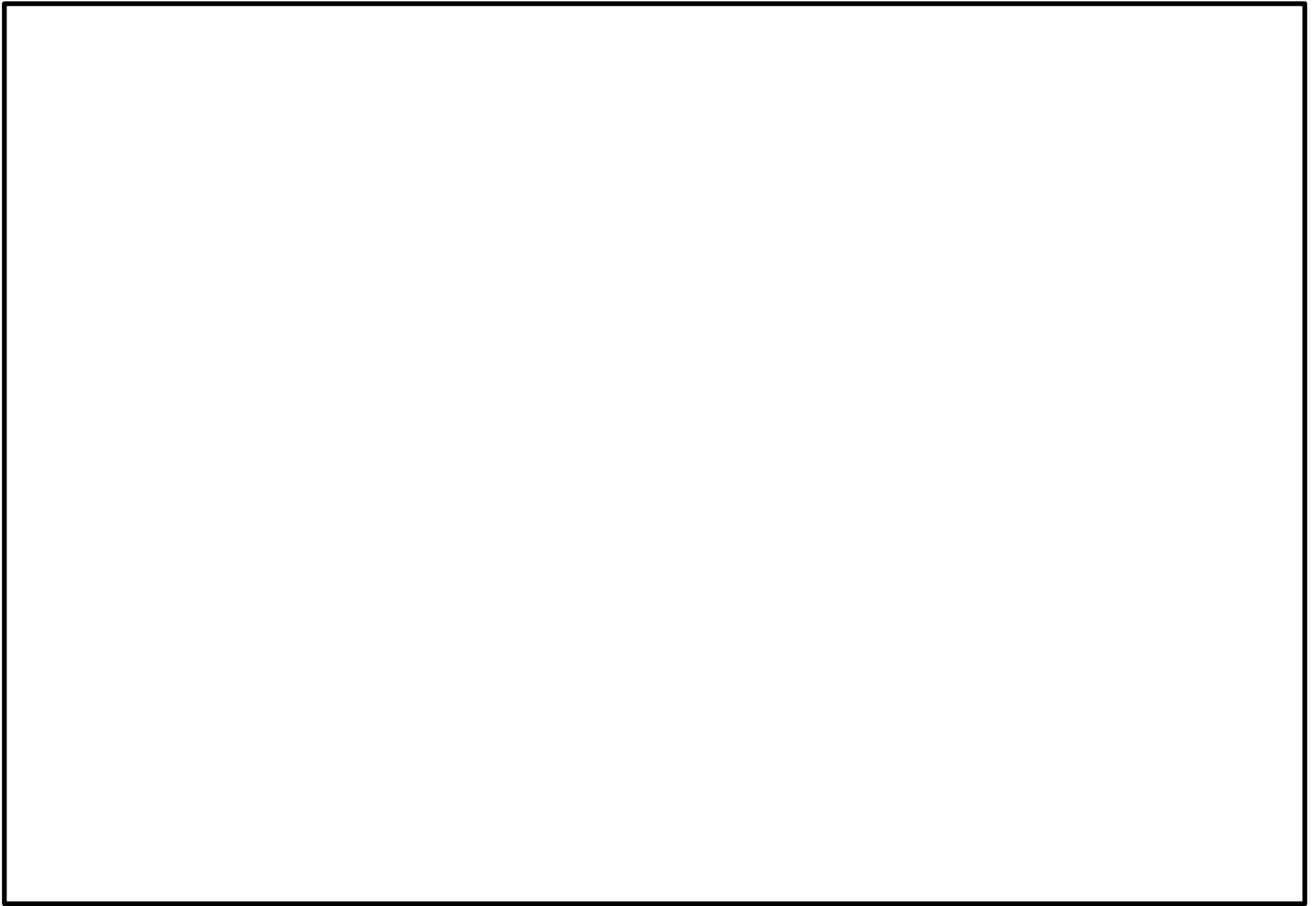
$-1/2$  (۲)

$-1/5$  (۱)

پاسخ: ( )



## نمودار های نقاط صفر صفرم



۳۴- اگر نمودار  $y = \frac{x^2 + ax^2 + bx + c}{x - d}$  به صورت

روبرو باشد،  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  را بیابید.

پاسخ: ( )

---



---



---



---



حد های صفر صفرم مثلثاتی

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

حد های زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos^2 x - 3 \cos x - 2}{\sin^2 x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cot^2 x - 1} =$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cot x - \tan x}{\sin x - \cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^\pi \pi x}{[x] + \cos \pi x} =$$

نکته: صفر مطلق



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] - 2}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{[x] - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{[x] - 2} =$$

۳۵- (سراسری ۹۹) حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x]+2}{x+2}$  کدام است؟

۴) صفر

۳) ۱

۲) -۱

۱)  $-\infty$

پاسخ: ( )



هم ارزی کم توان

حد های زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{4x^2 - \sqrt[3]{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 + \sqrt[3]{x-1}}{3(x-1)^2 - \sqrt[3]{x-1}} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)^2 + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x - 1} + (x - 1)^3} =$$

-۳۶ حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2 + x}}$  کدام است؟

∞ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: ( )

-۳۷ حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^4 + 2(x^2-1)}{(x^2-1)^4 + 3(x-1)}$  کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{16}$  (۳)

$\frac{4}{3}$  (۲)

$\frac{2}{3}$  (۱)

پاسخ: ( )

-۳۸ حد  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$  کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}}$  (۴)

∞ (۳)

صفر (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

پاسخ: ( )





حدهای شامل قدر مطلق و جزء صحیح و توابع دو ضابطه ای

محاسبه حدهای شامل جز صحیح:

راه اول : عدد گذاری

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [3x] + [-x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 3)[x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x =$$

راه دوم : ساخت درون جز صحیح

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{\delta})^-} [-\frac{3}{x}] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-4x + 1] =$$



راه سوم : محاسبه به کمک صعودی و نزولی بودن

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [-3x + 1] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x^2 - 4x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [x^2 + \Delta x] =$$

راه چهارم : حد های مثلثاتی

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} [\cos x] =$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [2 \sin x - 1] =$$

محاسبه حدهای شامل قدرمطلق:

- ابتدا عدد مورد نظر را درون قدرمطلق جایگذاری می کنیم اگر:
- الف) مثبت باشد خود عبارت خارج می شود.
  - ب) اگر منفی باشد قرینه ی عبارت را خارج می کنیم.
  - ج) اگر صفر شد با تعیین علامت درون قدرمطلق علامت را مشخص می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x + 1| - |2x - 1|}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - |x|} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{|\sin x|} =$$



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 + 4x + 3|}{x^2 - |3x + 4|} =$$

۳۹- اختلاف حد راست و چپ تابع  $y = 3[2x] - [-2x]$  وقتی  $x \rightarrow 1$  کدام مقدار است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱

پاسخ: ( )

۴۰- (سراسری ۸۷) در تابع با ضابطه  $f(x) = (x + a)[x]$  اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$  باشد،

عدد حقیقی  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) صفر

پاسخ: ( )

۴۱- اختلاف حد چپ و راست تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{[-x]+3}{[x]+2}$  در  $x = -3$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: ( )





۴۶ - حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{6x^2 - x - 1}$  را بیابید؟

پاسخ:

۴۷ - در تابع  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  چقدر است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

پاسخ: ( )

۴۸ - (سراسری ۱۴۰۰ تجربی) مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} [2 \sin x - 1]$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد

پاسخ: ( )

۴۹ - حد تابع  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - x^2}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - x^3}$  زیر را محاسبه کنید.

پاسخ: ( )

پیوستگی در نقطه  $x = a$ :

(۱) نقطه مورد نظر در دامنه باشد.

(۲) در نقطه  $a$  حد داشته باشد و برابر یک عدد شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad (۳)$$

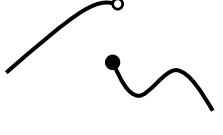
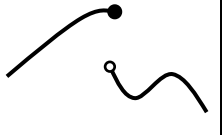
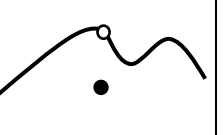
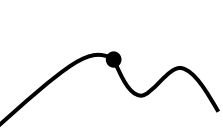
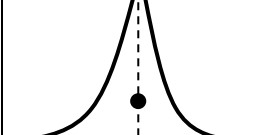
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

شکل های ناپیوسته



شکل های پیوسته



					
پیوسته راست					
پیوسته چپ					
پیوسته					
حد					



پیوسته  $\Leftrightarrow$  پیوسته راست و چپ

حد ندارد  $\Leftarrow$  ناپیوسته است.

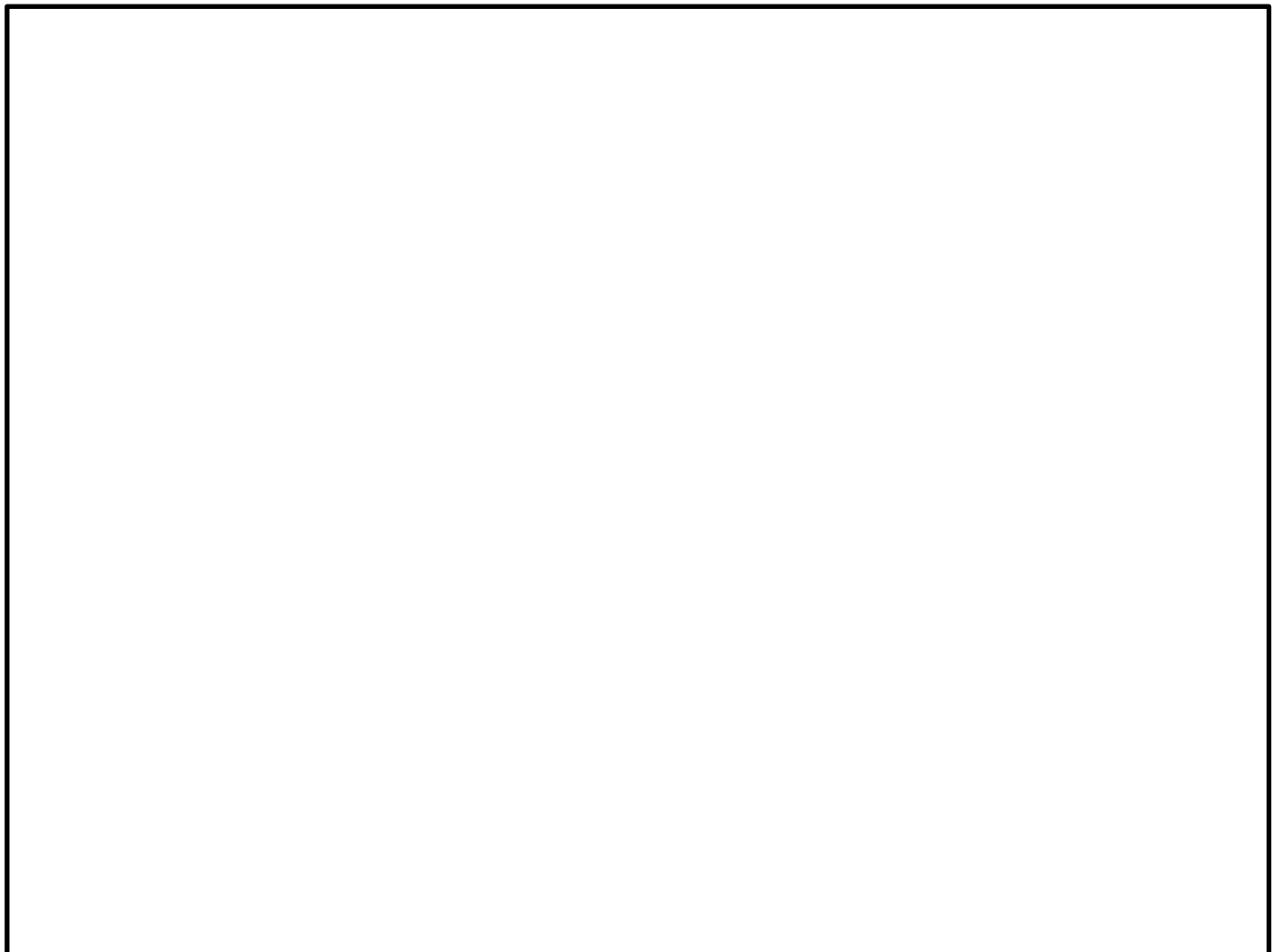
پیوسته  $\Leftarrow$  حد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ پیوستگی}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ پیوستگی راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \text{ پیوستگی چپ}$$

توابع ناپیوسته معروف





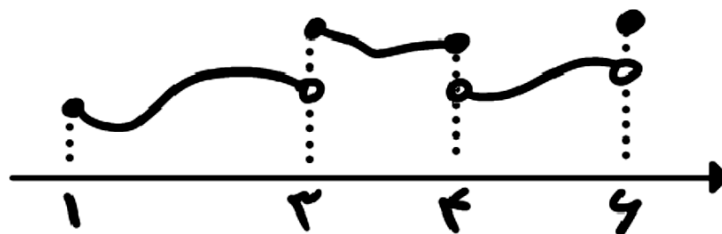
توابع پیوسته معروف:

- (۱) چند جمله ای ها
- (۲) سینوس و کوسینوس
- (۳) توابع نمایی
- (۴) رادیکال ها بجز ابتدا و انتهای دامنه
- (۵) توابع گویا بجز ریشه های مخرج
- (۶) توابع لگاریتمی در دامنه

پیوستگی روی بازه  $[a, b]$ :

- (۱) در همه نقطه بازه  $(a, b)$  پیوسته باشد.
- (۲) در سر بازه  $x = a$  پیوسته راست باشد.
- (۳) در انتهای بازه  $x = b$  پیوسته چپ باشد.

مثال: توابع روبرو در چه بازه هایی پیوسته هستند؟



مثال: کدام جمله در مورد تابع  $y = \sqrt{x}$  درست است؟

- (۱) در نقطه  $x = 0$  پیوسته است.
- (۲) در بازه  $[0, +\infty)$  پیوسته است.
- (۳) در بازه  $(0, +\infty)$  پیوسته است.
- (۴) در اعداد منفی ناپیوسته است.
- (۵) در کلیه نقاط بازه  $(0, +\infty)$  فقط پیوسته است.



۵۰- مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} -4x + a & x > -1 \\ -6x & x = -1 \\ x^2 - 5x & x < -1 \end{cases}$  را در نقطه  $x =$

۱- پیوسته باشد.

پاسخ: ( )

۵۱- پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & x \neq 1 \\ -3 & x = 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

پاسخ: ( )

۵۲- (سراسری ۹۰) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$  در  $x = \frac{3\pi}{4}$  پیوسته

است، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱)  $-1$       ۲) صفر      ۳)  $-\frac{1}{2}$       ۴)  $1$

پاسخ: ( )



۵۳- (سراسری ۸۶) تابع با ضابطه ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & x > 1 \\ ax - a + 3 & x \leq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  ، در نقطه

ی  $x = 1$  پیوسته است؟

(۴) هر مقدار  $a$

(۳) هیچ مقدار  $a$

(۲) فقط ۲

(۱) فقط  $\frac{1}{2}$

پاسخ: ( )

۵۴- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{ax}{|x|} & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ ax + b & x > 0 \end{cases}$  در نقطه ی  $x = 0$  پیوسته باشد،  $a + b$  چقدر است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: ( )

۵۵- (سراسری ۹۸) به ازای کدام مقادیر  $a$  تابع با ضابطه ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{|x+2|} & x \neq -2 \\ a & x = -2 \end{cases}$  در نقطه ی

$x = -2$  فقط از چپ پیوسته است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۶

(۲) -۶

(۱) -۱۲

پاسخ: ( )



۵۶- (سراسری ۹۰) تابع با ضابطه ی  $x \neq 1$   $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

در نقطه ی

$x = 1$  پیوسته است؟

(۴) هر مقدار  $a$

(۳) هیچ مقدار  $a$

(۲) ۳

(۱) -۳

پاسخ: ( )

۵۷- (سراسری ۹۸) تابع با ضابطه ی  $x \neq 2$   $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2|x-2|} & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

از نظر پیوستگی در نقطه ی  $x = 2$  چگونه

است؟

(۲) از راست پیوسته

(۱) از چپ پیوسته

(۴) پیوسته

(۳) از چپ و راست ناپیوسته

پاسخ: ( )

۵۸- (سراسری ۹۴) به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه ی  $1 \leq x \leq 6$   $x > 6$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$$

بر

تابع با ضابطه ی

روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۱ پیوسته است؟

(۴)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $-\frac{1}{4}$

(۱)  $-\frac{1}{2}$

پاسخ: ( )



۵۹- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه ی  $x > 2$   $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x} & x > 2 \\ x - a & x \leq 2 \end{cases}$  همواره پیوسته است؟

(۱)  $1/2$       (۲)  $1/6$       (۳)  $2/4$       (۴)  $3/2$

پاسخ: ( )

۶۰- (سراسری ۹۸ ریاضی) به ازای مقادیری از  $a$  و  $b$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x[x] & |x| < 1 \\ ax + b & |x| \geq 1 \end{cases}$  بر روی

اعداد حقیقی پیوسته است،  $a$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{3}{2}$       (۲)  $-1$       (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

پاسخ: ( )

۶۱- (سراسری ۹۸ ریاضی) به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $x > 2$   $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$  بر روی

اعداد حقیقی، پیوسته است؟

(۱)  $1/5$       (۲)  $2$       (۳)  $2/5$       (۴)  $3$

پاسخ: ( )



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{۶۲- (سراسری ۹۹ تجربی) به ازای کدام مقدار } a \text{، تابع با ضابطه}$$

در  $x = \frac{\pi}{2}$  پیوسته است؟

۱/۵ (۴)

۱ (۳)

۱ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ: ( )

$$۶۳- \text{(سراسری ۹۹ ریاضی) فرض کنید } f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases} \text{ یک تابع همواره پیوسته}$$

باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$\frac{5}{2}$  (۴)

۱ (۳)

۱ (۲)

$-\frac{3}{2}$  (۱)

پاسخ: ( )

۶۴- تابع  $y = [x]$  در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۶۵- تابع  $y = [2x]$  در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۶۶- تابع  $y = \left[ \frac{x-1}{2} \right]$  در چند نقطه از بازه  $[0, 20]$  ناپیوسته است؟



۶۷- تابع  $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$  در چند نقطه از بازه  $[-5, 5]$  ناپیوسته است؟

۶۸- تابع  $y = x[x]$  در چه نقاطی ناپیوسته است؟

نکته :

۶۹- تابع  $y = (x^2 - 1)[x]$  در چند نقطه از بازه  $(-5, 5)$  ناپیوسته است؟

۷۰- تابع  $y = (x^2 + x - 2) \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$  در چند نقطه از بازه  $(-5, 5)$  ناپیوسته است؟

۷۱- تابع  $y = x - [x]$  در چه نقاطی ناپیوسته است؟



۷۲- تابع  $y = [x^2]$  در بازه  $(1, a)$  پیوسته است حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

---

---

---

---

---

---

---

---

۷۳- تعداد نقاط صحیح که در آنها تابع  $y = (2x^3 + 3x^2 - 5x)[x]$  پیوسته است، کدام است؟

(۱) ۰                      (۲) ۱                      (۳) ۲                      (۴) ۳

پاسخ: ( )

---

---

---

---

---

---

---

---

🌀 از روی پیوستگی و یا ناپیوستگی دو تابع  $f$  و  $g$  در یک نقطه‌ی خاص موارد زیر را می‌توان گفت:

$f/g$	$f \cdot g$	$f \pm g$	$g$	$f$